Un autre regard sur les mathématiques numéros 1 et 2

Le présent texte est une refonte des deux premiers numéros de ma série qui s'intitulait “Un autre regard sur les mathématiques”. J'avais écrit le numéro 1 en 1994 et le numéro 2 en 1995. Je les ai assemblés pour former le présent texte au début 1999, avec les corrections de présentation les plus urgentes pour le rendre à peu près propre, mais ce n'est pas encore une version achevée. Je compte intégrer finalement les idées de ce texte et d'autres textes rédigés entre temps, à un livre en projet.

Pour me contacter :
Sylvain POIRIER
3bis, rue Auguste Dollfus 76600 Le Havre, 02 35 21 05 80 (vacances)
e-mail : spoirier@altern.org   Site web http://spoirier.lautre.net/

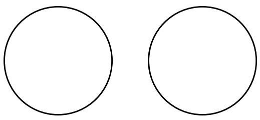
Les sujets abordés ici sont : Notions générales de symétrie, géométrie affine, espaces vectoriels et dualité, quantités (en physique), nombres complexes, une autre sorte de nombre (utile pour la relativité restreinte), exponentielle.

Numéro 1

1 Notions de symétrie - éléments - éléments semblables
2 Géométrie euclidienne
3 Transformations affines ; espace affine
4 Espaces vectoriels et opérations ; cas particulier de la dimension 1.
5 Base d'un espace vectoriel
6 Formes linéaires
7 Redéfinition de l'espace affine
8 Composantes d'une forme linéaire, dualité
9 Sous-espace vectoriels, orthogonal, espace quotient

1. Quelques notions générales de symétries

Commençons par la notion d'élément. Question : qu'est-ce qu'un élément ? Réponse : rien ! Alors, comme cela ne suffit pas à faire une théorie, prenons-en un deuxième. On écrira alors qu'ils sont différents. Ils forment un ensemble de 2 éléments. Un tel ensemble s'appelle une paire. Au fait, quelle différence y a-t-il entre eux ? Il n'y en a pas, bien qu'on les dise différents : on dira qu'ils sont *semblables*.



Exemple : il n'y a pas de différence entre ces cercles mais il y en a bien deux donc ils sont “différents”. Une paire de 2 éléments semblables sera dite *symétrique*.

Maintenant, parmi les 2 éléments de la paire, prenons-en un. Lequel ? La question n'a pas de sens puisqu'ils sont semblables. On va l'appeler A, et cette fois, on va munir la paire de l'élément A. Cela signifie que l'on pourra considérer la notion suivante : d'un élément de la paire, on pourra dire "c'est A" ou "ce n'est pas A". La paire est alors dissymétrique.

Dans la suite, à la place de "notion" on emploiera le mot "structure".

2. Espaces géométriques : généralités

Nous allons étudier différents espaces géométriques, à commencer par ceux qui nous sont déjà familiers. Un espace géométrique peut être considéré comme un ensemble dont les éléments sont appelés des points, et sur lequel sont définies certaines structures.

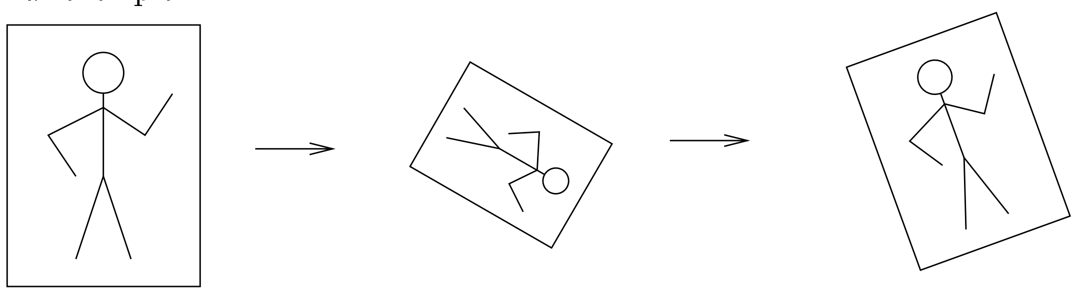
Une des structures les plus faibles est la topologie : c'est l'étude de la nature continue des ensembles, qui se conserve lors de toute déformation sans découpage ni collage (pour le dire simplement ; la définition formelle des structures topologique est beaucoup plus abstraite...). La première propriété topologique à remarquer est la dimension : ce qu'on appelle usuellement "l'espace" est de dimension 3, un plan a pour dimension 2, une droite, 1, et un point, 0 (mais plus généralement, le mot "espace" ne désignera pas forcément quelque chose de dimension 3).

On adoptera ici une approche non axiomatique des géométries, en partant de l'intuition issue des expériences que l'on peut faire.

Commençons par le plan, celui d'une feuille de papier, avec ses structures que l'on étudie depuis le cours moyen jusqu'en terminale. Nous l'appellerons **plan affine euclidien** (le mot "euclidien" ne renvoie pas directement à l'axiome d'Euclide, qui demeure vrai dans le plan affine étudié plus loin ; mais cet axiome était le dernier posé pour rendre la liste complète, ce qui explique l'usage de ce mot). De même, l'espace physique habituel sera appelé espace affine euclidien.

Tous ses points sont semblables. On appelle **similitude** toute transformation du plan euclidien qui conserve ses structures. Donc deux figures sont semblables s'il y a une similitude qui fait passer de l'une à l'autre.

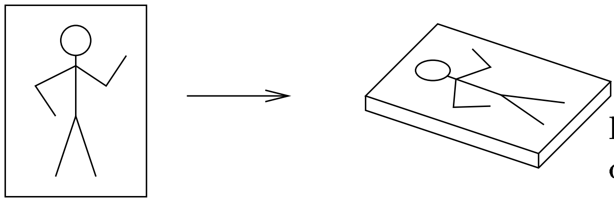
Par exemple :



Y aurait-il une dissymétrie du fait qu'il ne lève pas le même bras ? S'il y a une différence pour l'homme entre la droite et la gauche, il n'y en a pas pour le plan affine euclidien.

3. Géométrie affine

De même que pour la géométrie euclidienne, on peut considérer un espace affine de n'importe quelle dimension (droite, plan, etc.). Prenons le cas du plan. D'abord, voici comment se définit une transformation affine. C'est une transformation du plan ou d'une figure du plan qui s'obtient de la manière suivante : étant donnée une figure tracée sur un "plan" rigide de petite taille (par exemple une ardoise), on observe soit cet objet, soit son image dans un miroir, ce d'un point de vue éloigné dans n'importe quelle direction ; et éventuellement prenons-le en photo pour bien voir ce que l'on obtient (avec zoom pour y voir quelque chose). La figure que l'on obtient est une transformation affine de la première.



Remarque : en géométrie euclidienne, les similitudes sont des cas particuliers de transformations affines.

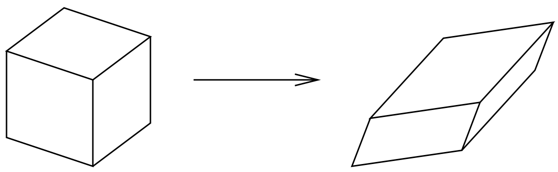
On appelle structures affines du plan les structures qui sont conservées lors des transformations affines. Ces structures, qui restent les mêmes dans un espace à n'importe quelle dimension, sont : l'alignement, le parallélisme (et il existe une seule parallèle à une droite passant par un point), et la possibilité de mesurer le rapport des "longueurs" de 2 segments à condition qu'ils soient parallèles.

La géométrie affine est l'étude des structures affines. Le plan affine est le plan seulement muni des structures affines : les angles, les distances n'interviennent pas.

Toutes les représentations du plan affine dans le plan affine euclidien qui conservent les structures affines sont équivalentes. On passe de l'une à l'autre par une transformation affine.

Remarques :

– On peut généraliser cela à l'espace à 3 dimensions : une transformation affine de l'espace peut transformer un cube en n'importe quel parallélépipède.



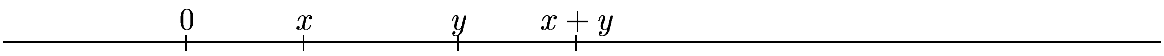
– Pour une droite, les structures affines et les structures affines euclidiennes sont les mêmes.

4. Espaces vectoriels

Définition : on appellera **espace vectoriel** (de dimension n) un espace affine (de dimension n) muni d'un point qu'on pourra appeler vecteur nul, ou origine, ou zéro. Ses points sont alors appelés **vecteurs**.

Nous allons définir des opérations sur les vecteurs, en commençant par le cas des espaces vectoriels de dimension 1.

Prenons donc une droite munie d'un point appelé zéro. C'est comme la droite des nombres réels, sauf que l'on ignore où se trouve le nombre 1 qui permettrait de la graduer (et on ne sait même pas de quel côté de 0 il se trouve). Il reste cependant des opérations que l'on peut effectuer sur ces éléments comme s'il s'agissait de la droite des réels : x et y étant des vecteurs de cette droite, on peut tracer $x + y$:



et on peut aussi aussi multiplier x par un nombre réel comme par exemple :

Ces nouvelles opérations d'addition et de multiplication vérifient les structures habituelles : si a et b sont deux nombres réels, et x, y, z trois vecteurs,

associativité de l'addition : $(x + y) + z = x + (y + z) = x + y + z$

commutativité : $x + y = y + x$

associativité de la multiplication : $a.(b.x) = b.(a.x) = (a.b).x$

distributivités : $a.(x + y) = a.x + a.y$, $(a + b).x = a.x + b.x$

élément neutre : $1.x = x$

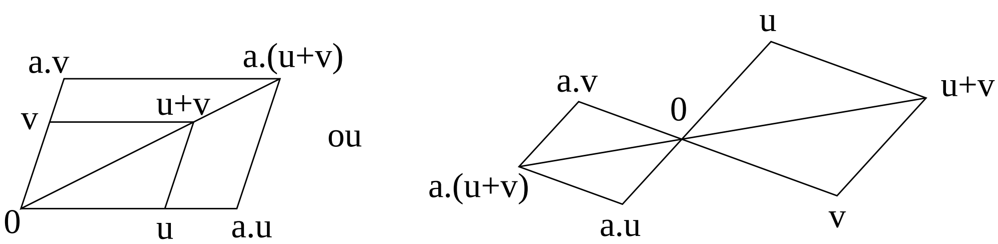
Sur une droite vectorielle, tous les vecteurs non nuls sont semblables et peuvent servir d'unité. Si $x \neq 0$, on peut donc choisir d'écrire $x = l$ ce qui rend encore plus évidentes certaines des égalité ci-dessus.

Cas des espaces vectoriels de dimension quelconque (heureusement, les dimensions 2 et 3 sont suffisamment quelconques pour ce dont on aura besoin). On généralise l'addition de deux vecteurs de la manière suivante : soient u, v deux vecteurs. O, u, $u + v$ et v sont les sommets d'un parallélogramme.

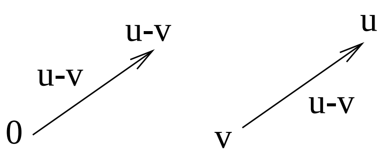
La multiplication d'un vecteur par un nombre réel s'effectue comme précédemment. On retrouve les mêmes égalités.

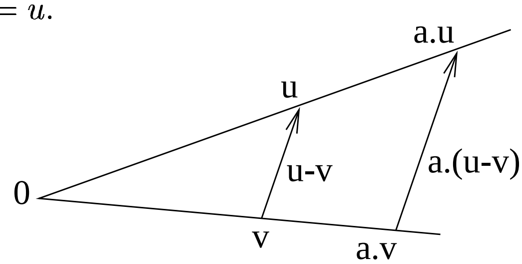
Remarque : considérons l'égalité

$$a.(u + v) = a.u + a.v$$



On peut retrouver le théorème de Thalès en remplaçant l'addition par une soustraction. Remarquons d'abord qu'on peut voir la différence $u - v$ en considérant la position de u par rapport à v car $v + (u - v) = u$.

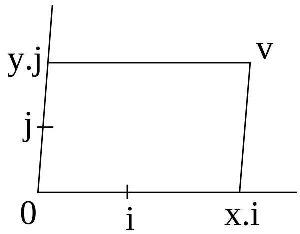


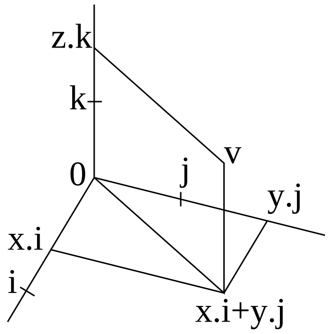


Puis il suffit de représenter $a.(u - v) = a.u - a.v$

5. Base d'un espace vectoriel

Une base d'un espace vectoriel E de dimension 2 est un couple de 2 vecteurs non colinéaires (c'est-à-dire non alignés avec 0). Appelons-les i et j. Tout vecteur v de E peut alors s'écrire sous la forme $v = x.i + y.j$, où x et y sont des nombres réels : ce sont les composantes du vecteur v dans la base (i, j).



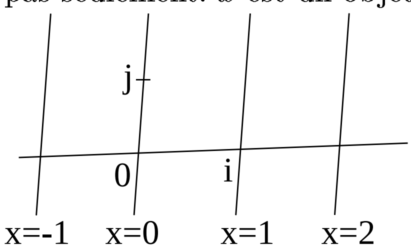


De même, une base d'un espace vectoriel de dimension 3 se constitue de 3 vecteurs i, j, k tels que O, i, j, k ne soient pas dans un même plan. On peut alors écrire $v = x.i + y.j + z.k$, où x, y, z sont les composantes de v qui se nomment respectivement abscisse, ordonnée et cote. Par exemple, si i et j sont représentés horizontalement (c'est-a-dire que le plan (O, i, j) est horizontal), alors z est proportionnel à la hauteur (l'altitude) de v par rapport à O.

Toutes les bases d'un espace vectoriel sont semblables. Si on munit un espace vectoriel d'une base, il ne lui reste plus aucune symétrie : deux vecteurs ne peuvent plus être semblables puisqu'ils n'ont pas les mêmes composantes et que deux nombres réels différents ne sont jamais semblables.

6. formes linéaires

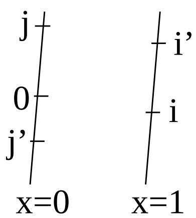
Plaçons-nous d'abord dans le plan vectoriel. Que sont x et y ? Ce sont les composantes de v. Mais comme il est compliqué de considérer deux choses à la fois, prenons-en une. Qu'est-ce que x ? Un nombre réel, me direz-vous. Oui, mais pas seulement. x est un objet qui joue un rôle pour le plan vectoriel.



x s'annule sur la droite (Oj) : $x = 0$ est l'équation de cette droite.

x est, en valeur absolue, proportionnel à la distance de v à cette droite, et son signe indique de quel côté il se trouve.

$x = 1$ est l'équation de la droite parallèle à (Oj) passant par i, $x = a$ celle de la parallèle à Oj passant par $a.i$; toutes ces droites sont parallèles.



x est la désignation d'une mesure que l'on effectue sur le plan vectoriel. x n'est pas complètement lié à i et j, car on peut remplacer i et j par certains vecteurs i' et j' sans que la mesure x ne change.

Remarquons enfin qu'on peut connaître parfaitement x à partir de la droite d'équation $x = 1$ (qui ne passe jamais par l'origine), car il est possible à partir d'elle de construire n'importe quelle droite d'équation $x = a$ sans utiliser les vecteurs de base (en commençant par $x = 0$ qui est la parallèle passant par l'origine). Au niveau bac+l, on donne à ce genre d'objet le nom de **forme linéaire !**. Il arrive aussi parfois que cela soit appelé “covecteur”.

Notons provisoirement pour toute forme linéaire f, $f(v)$ la mesure f du vecteur v (donc $x(v)$ est l'abscisse de v...). Soient v_1, v_2 deux vecteurs. On a $x(v_1 + v_2) = x(v_1) + x(v_2)$, et pour tout réel a, $x(a.v) = a.x(v)$. Ces égalités sont vraies pour toutes les formes lineaires.

7. Redéfinition d'un espace affine de dimension n

Soit E un espace vectoriel de dimension $n + 1$ muni d'une forme linéaire non nulle notée m et appelée la **masse** (comme x s'appelle abscisse et y ordonnée). (on peut commencer par voir le cas $n = 1$: E est un plan vectoriel et on obtiendra une droite affine, puis $n = 2$).

L'espace affine dont il sera question sera celui d'équation $m = 1$. Pour tout élément a de E, $m(a)$ sera appelé masse de a. On dira que a est un **point** si sa masse est 1 ($m(a) = 1$). Seuls les éléments de E de masse nulle seront appelés “vecteurs”. Les autres seront appelés des **points pondérés**. Si a est un point pondéré, on appellera **position** de a le point $P = a/m(a)$, de telle sorte que l'on puisse écrire $a = m(a).P$.

On peut appliquer cela au problème de la représentation en perspective. L'observateur se place à l'origine de l'espace, et le plan $m = 1$ est le plan de la représentation. Tout point de l'espace se représente alors par sa “position” selon la définition précédente.

Soit $\mathcal{E}$ l'espace affine des “ points”. Le sous-espace V de E formée des **vecteurs** (éléments de masse nulle) sera appelé “espace vectoriel associé à $\mathcal{E}$”, ou plus simplement “**espace des vecteurs de $\mathcal{E}$**”.

Tout vecteur $\vec{v}$ s'obtient comme différence de 2 points A et B : $A \bullet\!\xrightarrow{\ \vec{v}\ } B$

$$\vec{v} = \overrightarrow{AB} = B - A \iff B = A + \vec{v} \text{ et } m(B) = m(A) + m(\vec{v}) = 1.$$

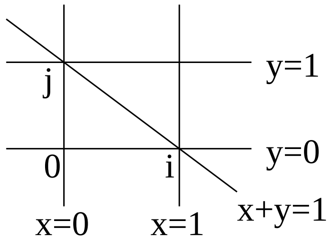
Voir la remarque au paragraphe 4 qui introduisait la représentation d'un vecteur $\vec{v}$ par une flèche (dans le plan), qui se trouve indispensable ici puisqu'un vecteur d'un espace (un plan) affine n'a pas de position. Un **repère** de $\mathcal{E}$ se définit par un point de $\mathcal{E}$ appelé *origine*, et une base de V, ce qui constitue une base de E. Si $n = 3$ par exemple, un point de coordonnées (x, y, z) est de composantes $(1, x, y, z)$ dans cette base.

Les coordonnées d'un élément de E de position M sont appelées des **coordonnées homogènes** de M : ce sont des coordonnées (T, X, Y, Z) telles que $X = T.x$, $Y = T.y$, $Z = T.z$ et $T \neq 0$.

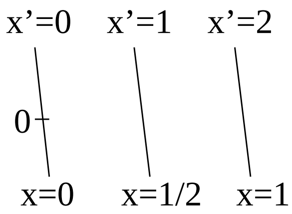
8. Dualité

Opérations sur les formes linéaires

Nous avons d'abord pris les formes lineaires pour des nombres réels. Par conséquent, nous pouvons définir des opérations sur les formes linéaires comme étant des opérations sur les nombres qu'elles sont aussi (pas n'importe quelles opérations cependant).



Addition : si x et y sont 2 formes linéaires, $x+y$ en est une. Pour construire la droite $x+y=1$, on prend l'intersection i de $x=1$ et $y=0$ et l'intersection j de $x=0$ et de $y=1$. La droite $x+y-1$ est la droite (ij).



Multiplication par un réel a : soit x une forme linéaire et $x' = a.x$. La droite $x' = 1$ est aussi la droite $x = 1/a$. Donc, lorsqu'on multiplie une forme linéaire par un réel a, la "distance" entre les droites de niveau 0 et 1 (i.e d'équation $x = 0$ et $x = 1$) est divisée par a (si $a \neq 0$). ex. : $x' = 2.x$

Composantes d'une forme linéaire

Soit f une forme linéaire. Alors pour tout vecteur $v = xi + yj$, sa mesure f s'écrit $f = f(xi + yj) = f(i).x + f(i).y$ ($\leftarrow$ Relations du 6)

Autrement dit, on reconstruit la droite $f = 1$ d'après ses intersections avec les droites (Oi) et (Oj). Comparons cette formule ($f = f(i).x + f(j).y$) avec la formule précédente $v = x(v).i + y(v).j$. A présent, les formes linéaires x et y jouent le rôle de base, et les vecteurs i et j servent à mesurer les composantes de f dans cette base. Il y a échange parfait des rôles entre vecteurs et formes linéaires.

Constatons que les propriétés suivantes des formes lineaires sont analogues à celles des vecteurs. Toutes les formes linéaires sont semblables (et se représentent par une droite ne passant pas par l'origine) sauf la forme linéaire nulle (qu'on ne représente pas). On ne peut dire qu'une forme linéaire est nulle que si elle est nulle pour tout l'espace vectoriel, car sinon on ne peut pas affirmer qu'elle soit nulle, donc elle est non nulle.

Deux formes linéaires sont colinéaires si elles ont même ligne de niveau 0 ou si l'une d'elle est nulle (comme deux vecteurs v et v' sont colinéaires si les droites (Ov) et (Ov') sont les mêmes ou si un est nul), et on peut alors écrire l'une comme multiple de l'autre. Deux formes linéaires non colinéaires et non nulles peuvent être prises comme base des formes linéaires. Toutes les bases sont semblables. Ainsi, vecteurs et formes linéaires jouent des rôles symétriques. Le même raisonnement peut s'appliquer à des espaces vectoriels de n'importe quelle dimension (finie). Si E est un espace vectoriel, l'ensemble des formes linéaires de E est lui-même un espace vectoriel, de même dimension que E, qu'on appellera **dual** de E et qu'on notera E^*.

9. Sous-espaces, orthogonal, quotient

Nous allons dans ce paragraphe prendre le cas d'un espace de dimension 3 car cela donne un idée suffisamment générale des notions abordées. Soit d'abord E

espace affine de dimension 3. On appellera **sous-espace affine** de E un point, une droite, un plan de E ou encore l'espace E lui même.

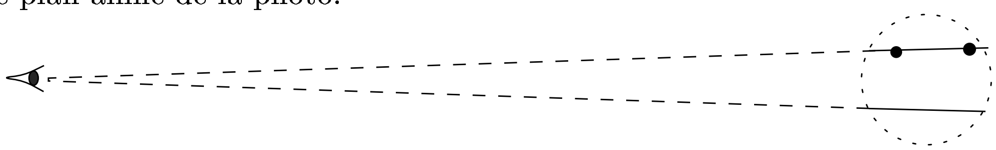
Si E est un espace vectoriel, on appellera sous-espace vectoriel de E un sous-espace affine F de E contenant l'origine de E, laquelle fait de F un espace vectoriel. Nous avons vu que E^*, le dual de E, a les mêmes propriétés que E. On peut donc se demander comment il est possible de représenter dans E les sous-espaces vectoriels de E^*.

Prenons d'abord le cas des droites vectorielles de E^*. De même que pour une droite vectorielle D de E, il suffit de connaître un vecteur v de D car D est alors la droite (Ov). Puis, parmi les vecteurs multiples de v, il faut "oublier" où est v. Prenons donc une forme linéaire f. Pour se fixer les idées, on peut dire que f est la mesure de l'altitude en mètres, l'origine étant à l'altitude zéro. f se caractérise par ses plans de niveaux 0 et 1 qui sont les plans horizontaux d'altitudes 0 et 1 m. $3.28f$ est la mesure de l'altitude en pieds. Le plan P de niveau 0 est le même, mais l'autre ne l'est pas. En fait, n'importe quel plan horizontal autre que P correspond au plan de niveau 1 d'un multiple de f : si son altitude est a, $f = a \iff (1/a).f = 1$

Une droite vectorielle D de E^* se représente donc dans E par son plan P de niveau 0, formé des vecteurs pour lesquels tous les éléments de D s'annulent ; D est alors l'ensemble des formes linéaires qui s'annulent sur P. On dit que P est l'orthogonal de D, et inversement D est l'orthogonal de P.

Inversement, en échangeant E et E^*, on doit pouvoir représenter un plan vectoriel P de E^* par une droite vectorielle D de E. Mais pour bien le voir on va d'abord introduire la notion d'espace quotient.

Soit un espace affine E de dimension 3 avec un objet à 3 dimensions placé dans un certain lieu limité (les droites et les plans de la figure sont coupés à l'extérieur) et que l'on observe d'un point de vue très éloigné. On en prend la photo. Appelons Q le plan affine de la photo.



Deux points alignés avec l'observateur (ou l'appareil photo) ne peuvent être distingués : ils se superposent. Deux droites pointant vers l'observateur peuvent être considérées en ce lieu comme parallèles : elles ont la même direction qui est la direction d'observation. L'image observée est une figure du plan affine Q, lequel sera appelé **quotient** de l'espace par la direction d'observation. Si maintenant E est un espace vectoriel, l'image de l'origine de E servira d'origine de Q qui sera donc un plan vectoriel. On assimilera la "direction d'observation" à la droite vectorielle D de E correspondante. Un point de Q correspond à une droite de E parallèle à D (ou : de direction D) ; Une droite de Q correspond à un plan de E contenant des droites parallèles à D.

Soit f une forme linéaire sur Q. f permet de mesurer un vecteur de E par son image sur Q. On peut ainsi considérer f comme une forme linéaire sur E, et ses droites de niveau dans Q correspondent à des plans de niveau dans E. Le dual de Q constitue ainsi un sous-espace vectoriel du dual de E, qui est l'orthogonal de D. En effet, les vecteurs de D sont ceux qui sont représentés par le vecteur nul dans Q donc apparaissent nuls pour les formes linéaires de Q.

Plus généralement, si E est un espace vectoriel et F un sous-espace vectoriel de E, on appellera **orthogonal** de F le sous-espace vectoriel $F^\perp$ de E^* constitué des formes linéaires nulles sur F. Inversement, l'orthogonal de $F^\perp$ est F. ($(F^\perp)^\perp = F$)

Alors, le dual de $F^\perp$ s'appelle le **quotient** de E par F. On peut également définir le quotient de la manière suivante généralisable au cas où F n'est pas un sous-espace vectoriel mais plus généralement un sous-groupe additif de E, c'est-à-dire que l'addition et la soustraction des éléments de F reste dans F (par exemple si E est une droite, F peut en être une graduation) : c'est l'ensemble obtenu en identifiant (confondant) deux éléments de E si et seulement si leur différence est dans F.

La somme des dimensions de F et de $F^\perp$ est toujours égale à la dimension de E. Par exemple l'orthogonal du vecteur nul de E est E^* et réciproquement.

Cette égalité sur les dimensions : $\dim F + \dim F^\perp = \dim E$ peut se démontrer de la manière suivante. Soient $n = \dim F$, $p = \dim F^\perp$. Considérons p vecteurs dont les images sur E/F forment une base de E/F. En y ajoutant n vecteurs formant une base de F, on obtient une base de $n+p$ vecteurs de E : pour tout vecteur de E, son image sur E/F donne ses p premières composantes ; les n autres composantes servent à le distinguer parmi les vecteurs qui ont la même image et forment un sous-espace affine parallèle à F, qui est l'espace de ses vecteurs.

Numéro 2

Quelques précisions

Des mots d'emploi pour la moitié inventé seront introduits en caractère gras. Le signe • rappelle qu'ils ont été définis.

Pour abréger, à partir de maintenant, le mot "**espace**" signifiera "espace vectoriel", de même pour "sous-espace" (qui contient alors l'origine), sauf si l'on précise "affine", ou plus tard, "projectif". Dans ce qui suit (jusqu'au numéro 3), tous les espaces seront de dimension finie, car certaines propriétés remarquables qui ont été mentionnées concernant la dualité ne sont plus valables en dimension infinie.

Changement de notation : étant donné un espace E, $v \in E$, $x \in E^*$, le réel $x(v)$ sera appelé **produit scalaire** de x et v, et noté $< x|v >$. (c'est encore une notation provisoire qui tiendra jusqu'à ce qu'on introduise les tenseurs.)

Certains résultats secondaires seront donnés sans démonstration, afin d'éviter d'inutiles surcharges.

1. Notions de symétries, suite

Un **objet** fondé sur un ensemble (en abrégé : objet d'un ensemble) est un objet formé de relations dans cet ensemble, et éventuellement de nombres, entiers ou réel. Par exemple, un sous-espace, une base, une forme linéaire, etc., sont des objets d'un espace ; un vecteur est un objet d'un espace affine ; un élément est aussi un objet de l'ensemble dont il fait partie.

Donnons à l'adjectif "**semblable**" le même sens pour des objets et des ensembles que pour des éléments : s'il n'y a pas de différence entre eux, c'est-à-dire s'ils jouent le même rôle, ou encore si on peut en prendre un à la place de l'autre, sans que cela entraîne aucune conséquence (mais les échanger n'est pas toujours possible. Exemple : un vecteur $\vec{u}$ et $2\vec{u}$). On écrira : $a \sim b$.

Munir un ensemble d'un de ses objets, c'est donner un nom à cet objet pour le fixer.

On appellera **structure** d'un ensemble tout objet fondé sur cet ensemble et que l'on peut désigner par son nom ou par une définition. Ainsi une structure est un objet qui n'est semblable à aucun autre objet (la réciproque est fausse bien qu'on puisse confondre ces deux notions en première approximation : par exemple "il existe" des nombres réels dont il est impossible de donner une définition finie, bien qu'ils ne soient semblables à aucun autre)

On appelle **géométrie** d'un ensemble la donnée de ses structures internes. Deux ensembles semblables ont toujours la même géométrie. Par contre, deux ensembles qui ont la même géométrie peuvent n'être pas semblables, à cause du rôle qu'ils jouent dans un certain contexte. Exemple : un espace de vecteurs$^\bullet$ et son dual.

Soient $\mathcal{G}$ et $\mathcal{H}$ deux géométries, E un ensemble de géométrie $\mathcal{H}$. On dira que $\mathcal{G}$ est **sous-jacente** à $\mathcal{H}$ (ou : à E) si E possède toutes les structures de $\mathcal{G}$, avec d'autres qu'il suffit d'oublier pour voir E comme étant de géométrie $\mathcal{G}$. On dira aussi : "$\mathcal{H}$ est **plus riche** que $\mathcal{G}$". Inversement, un ensemble de géométrie $\mathcal{G}$ peut acquérir la géométrie $\mathcal{H}$ si on le munit d'un de ses objets. Par exemple, la géométrie affine de dimension n est sous-jacente à un espace vectoriel, et à un espace affine euclidien de même dimension.

Dans ce qui va suivre, quand on désignera un ensemble E avec un nom de géométrie $\mathcal{G}$ ("E est un $\mathcal{G}$"), il sera sous-entendu que E puisse être de géométrie plus riche que $\mathcal{G}$, car ce qui est énoncé sur $\mathcal{G}$ est valable dans les géométries plus riches. Sauf une chose : le fait que deux objets soient semblables. Si on en a besoin, il faudra donc dire :"E est un $\mathcal{G}$ **général**" pour signifier que E est précisément de géométrie $\mathcal{G}$.

On dira qu'il existe un **lien intrinsèque** entre deux ensembles E et F, si munir E d'un de ses objets peut modifier la géométrie de F. En voici quelques exemples.

• Ensembles identifiables.

On appelle **bijection** entre deux ensembles E et F une correspondance associant chaque élément de l'un à un unique élément de l'autre. E et F sont **identifiables** si on peut définir explicitement une bijection entre les deux, qui n'est donc semblable à aucune autre (si la paire $\{E, F\}$ est symétrique, la bijection doit être définie de manière symétrique par rapport à E et F). On peut alors les identifier, c'est-à-dire les confondre en un seul ensemble, en confondant un élément avec son correspondant, après avoir effectivement précisé quelle bijection on utilise (la plus naturelle possible). On le fera souvent, mais pourtant pas toujours. Soit parce qu'une traduction des opérations serait nécessaire pour éviter les confusions, soit parce que leur distinction est nécessaire dans le contexte, soit parce qu'une autre identification peut intervenir entre les deux ensembles, pour une autre raison. S'il y a plus de 2 ensembles, on ne les dira identifiables que si l'on dispose d'une identification cohérente, i.e. l'identification de E_1 à E_2 et celle de E_2 à E_3 redonnent celle de E_1 à E_3.

• Ensemble extrait d'un autre ensemble.

On dira que F est **extrait** de E si F est identifiable à un ensemble A d'objets de E tel que E est muni de A, et donc A n'est semblable à aucun autre ensemble d'objets de E : pour tous objets x, y de E, $(x \sim y$ et $x \in A) \implies y \in A$.

En voici une autre définition, souvent équivalente à la première :

F est extrait de E si tous les ensembles semblables à F vis-à-vis de E sont identifiables entre eux.

• On dira que F **représente** E si F est extrait de E et E est extrait de F.

Exemples : l'ensemble des vecteurs d'un espace affine en est extrait ; un espace est représenté par son dual.

2. Grandeurs

Comme le vocabulaire usuel concernant "l'homogénéité des grandeurs" est assez vague, fixons-le une fois pour toutes.

On appellera **grandeur** tout espace vectoriel de dimension 1. Ses éléments seront appelés des **quantités**. Une grandeur générale• sera donc une grandeur dont tous les éléments non nuls sont semblables.

A étant une grandeur, on appelle **unité** de A une quantité non nulle dont on munit A ou dont A est munie et que l'on identifie à 1 ; elle sert de base pour identifier toute quantité de A à sa composante dedans. Ainsi A est identifiée à $\mathbb{R}$.

On appellera produit de deux grandeurs A et B la grandeur $C = AB$ formée de quantités du type $c = ab$ $(a \in A, b \in B)$ avec la règle suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}, a \in A, b \in B, \quad x(ab) = (xa)b = a(xb)$$

Ceci permet de construire $a'b'(a \in A, b \in B)$ à partir de ab $(a \in A_\star, b \in B_\star)$:

$$a' = xa, b' = yb \implies a'b' = (xy)(ab)$$

On en déduit les règles de distributivité. La commutativité et l'associativité des produits de quantités s'obtiennent au moyen des identifications nécessaires.

Cas particuliers :

• $A = \mathbb{R}$: on identifie alors le produit ab avec le produit d'un vecteur par un réel déjà défini. Donc $\mathbb{R}B = B$. $\mathbb{R}$ joue le rôle d'un élément neutre (comme 1) dans les produits de grandeurs.

• $A = \mathbb{R}$ et $B = \mathbb{R}$: on retrouve le produit de nombres réels.

• $B = A^*$(A et B sont duaux). On identifie alors le produit $ab = c$ au produit scalaire $< a \,|\, b >$ donc $AA^* = \mathbb{R}$.

Pour tout $a \in A_\star$, on appelle **inverse** de a l'élément $a^{-1} \in A^*$ qui est "la base duale de a", i.e. $a^{-1}a = 1$. Alors $\forall\, b \in A, a^{-1}b =< a^{-1} |\, b >$ est l'abscisse de b dans "la base a" et sera noté $\frac{b}{a}$. On notera $A^{-1} = A^*$.

On ne peut additionner deux quantités pour en obtenir une troisième que si elles sont de la même grandeur.

On définit $\forall\, n \in \mathbb{N}_\star$, $\quad A^n = \overbrace{AA \ldots A}^{n \text{ fois}} \quad$ et $\quad A^{-n} = \overbrace{A^{-1}A^{-1} \ldots A^{-1}}^{n \text{ fois}}$

3. Signe, valeur absolue, grandeurs orientées

(à l'époque de la rédaction de ce texte, j'avais fait là quelque chose de très compliqué. En voici une version plus simple).

Nous ne considérerons ici que les quantités non nulles (0 ne présentant aucun intérêt).

On va chercher ici à distinguer le signe d'une quantité, et à exprimer celle-ci comme produit de son signe par sa valeur absolue que l'on qualifiera de positive : $x = \mathrm{s}(x)|x|$, avec $|x| > 0$.

On considère un **système de grandeurs**, c'est-à-dire un ensemble (infini) de grandeurs dont tous les produits et les inverses font également partie du système.

On va supposer que ce système comporte une opération appelée *valeur absolue*, qui obéit aux conditions suivantes (où $x > 0$ signifie $x = |x|$) :

$$x \in \mathbb{R}^+_\star \;\Rightarrow\; x > 0$$

$\forall\, x \neq 0,$
$$|x| > 0$$

$$(x > 0,\; n \in \mathbb{N}_\star \text{ et } x^n = 1) \;\Rightarrow\; x = 1$$

$\forall\, x, y$
$$|x|\,|y| = |xy|$$

$$\Rightarrow\; |x| \left|\frac{y}{x}\right| = |y| \;\Rightarrow\; \qquad \frac{|y|}{|x|} = \left|\frac{y}{x}\right|$$

En particulier, $|-1| > 0$ et $|-1|^2 = |(-1)(-1)| = |1| = 1 \;\Rightarrow\; |-1| = 1$.

On en déduit que $|-x| = |-1|\,|x| = |x|$.

On pose par définition : $x < 0 \iff -x > 0$ $(\Rightarrow |x| = |-x| = -x \neq x \Rightarrow x \not> 0)$

et
$$\mathrm{s}(x) = \frac{x}{|x|} \;\iff\; x = \mathrm{s}(x)|x| \;\Rightarrow\; |\,\mathrm{s}(x)| = 1$$

Par esprit de métonymie, pour une grandeur G, on notera $|G|$ et $\mathrm{s}(G)$ respectivement les grandeurs de $|x|$ et de $\mathrm{s}(x)$ pour $x \in G$.

On dira que x est **normé** si $|x| = 1$; et sa grandeur G le sera également : 'G est normé' si $|G| = \mathbb{R}$. Enfin, 'G est **orienté**' si $|G| = G$, i.e. les quantités de G sont positives ou négatives.

Une quantité x et sa grandeur seront dits **unitaires** si $x^2 = 1$ (une grandeur est unitaire lorsque les carrés de ses éléments sont des réels positifs).

En pratique, la plupart des systèmes de grandeurs que l'on utilisera auront la propriété : $(\forall\, x \neq 0),\ x^2 > 0$ ($\Longleftrightarrow$ les mots "unitaire" et "normé" se confondent).

Une grandeur unitaire est représentée$^\bullet$ par la paire de ses deux quantités unitaires. Par conséquent, pour toute paire P, on peut définir la grandeur G_P construite à partir des éléments de P considérés comme deux quantités unitaires opposées. La multiplication entre grandeurs unitaires définit donc une opération sur des paires.

4. Nombres complexes

On appellera **espace euclidien** un espace affine euclidien muni d'un point origine qui en fait un espace vectoriel. Un espace euclidien de dimension 2 sera appelé **grandeur complexe**, et ses éléments des **quantités complexes**. Toutes les quantités non nulles d'une grandeur complexe générale sont semblables.

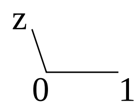
On appelle **orientation** d'une grandeur complexe la paire des 2 sens de rotation possibles dans ce plan. (On verra après les tenseurs la définition générale de l'orientation d'un espace de dimension quelconque.)

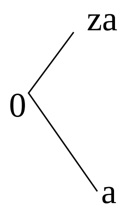
Une grandeur complexe munie d'une unité sera appelée un **ensemble de (nombres) complexes**. La droite passant par 0 et 1 sera identifiée à $\mathbb{R}$. On appelle **conjugué** d'un complexe z et on note $\overline{z}$ le symétrique de z par rapport à $\mathbb{R}$. Si l'ensemble des complexes est général$^\bullet$ (c'est-à dire si son orientation est symétrique), et $z \notin \mathbb{R}$, alors $\overline{z}$ est l'unique autre nombre complexe du même ensemble semblable à z. Les nombres z et $\overline{z}$ s'échangent lorsqu'on échange les 2 sens de rotation.

$$z \in \mathbb{R} \iff z = \overline{z}$$

L'orientation d'un ensemble de complexes le représente$^\bullet$. Ainsi, pour toute paire P, on notera $\mathbb{C}_P$ l'ensemble de complexes dont l'orientation est P, ou simplement $\mathbb{C}$ si la paire P est fixée une fois pour toutes.

Définissons à présent le produit d'une quantité complexe $a \in G$ par un complexe $z \in \mathbb{C}_P$, qui n'a de sens que si l'orientation de G est P. za est le point de G où l'on représenterait z si a était prise comme unité, en respectant le sens de rotation indiqué par z. Comme cas particulier, si $G = \mathbb{C}$, on trouve la multiplication de 2 complexes.





La somme de 2 complexes est leur somme vectorielle.

$\forall\, a, b \in \mathbb{C},\ \forall\, x, y \in G,$

$$a\,(bx) = (ab)\,x$$

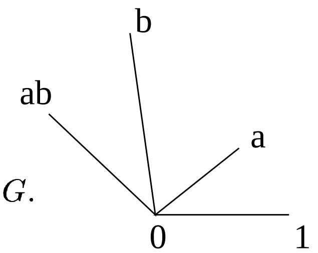
$$(a+b)\,x = ax + bx$$

Il suffit de prendre x comme unité pour le voir.

$$a\,(x+y) = ax + ay$$

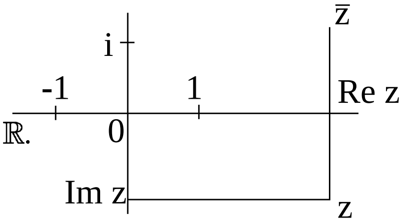
puisque la multiplication par a définit une similitude$^\bullet$ de G.

$$ab = ba$$



On peut le vérifier en remarquant que les distances à 0 se multiplient, et les angles orientés (appelés arguments : voir plus loin) s'ajoutent. Autre manière de le voir : posons $y = bx$. Comme la multiplication par a définit une similitude directe de G (c.à.d. qui n'inverse pas son orientation), $ay = b\,(ax) \iff ab = ba$.

Partie réelle, partie imaginaire, module



On appelle **partie réelle** de z le nombre $\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}(z + \overline{z})$. C'est le projeté orthogonal de z sur $\mathbb{R}$.

On appelle **partie imaginaire** de z le nombre $\operatorname{Im} z = \frac{1}{2}(z - \overline{z})$. $\quad\Rightarrow z = \operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z$

On appelle droite des **imaginaires purs** la perpendiculaire à $\mathbb{R}$ passant par 0. z est imaginaire pur $\iff \operatorname{Re} z = 0 \iff \overline{z} = -z$.

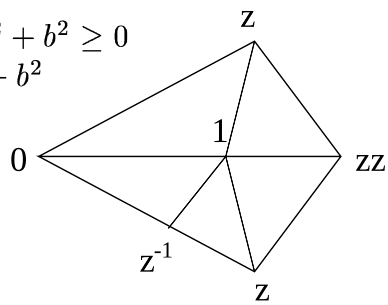
On note $|z|$ (**module** de z) la distance de z à 0.

$\forall\, z, z' \in \mathbb{C}, |zz'| = |z|\,|z'|$. En particulier, $|z\overline{z}| = |z|\,|\overline{z}| = |z|^2$

Pour faire les calculs, on utilise un nombre i imaginaire pur et de module 1 (qui représente un sens de rotation) : $i^2 = -1$. On décompose un complexe z dans la base orthonormée $(1, i)$: $z = a + b\,i$ $(a, b \in \mathbb{R}) \Rightarrow \overline{z} = a - b\,i$ (il est courant d'appeler 'partie imaginaire de z' le nombre b au lieu de $b\,i$).

Notons $\mathrm{N}(z) = z\overline{z} = (a + b\,i)\,(a - b\,i) = a^2 - (b\,i)^2 = a^2 + b^2 \geq 0$

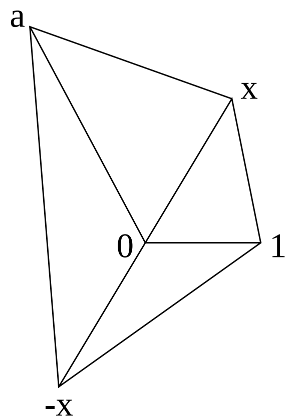
On obtient ainsi le théorème de Pythagore : $|z|^2 = a^2 + b^2$



Inverse d'un nombre complexe $z = a + b\,i$:

$$\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{z\overline{z}} = \frac{a - b\,i}{a^2 + b^2}$$

Racines carrées d'un nombre complexe



Tout nombre complexe $a \neq 0$ a 2 racines carrées opposées, x et $-x$: $x^2 = a \iff \sqrt{a} = \pm x$. (Pour simplifier, l'opération $\sqrt{}$ aura implicitement 2 résultats opposés, sauf pour calculer le module). Comme leur calcul à partir de l'opération racine carrée sur des réels ne figure pas dans les programmes scolaires, le voici :

Soit $Z = a + b\,i$. On cherche $z = x + y\,i$ tel que

$Z = z^2 = (x + y\,i)^2 = (x^2 - y^2) + (2xy)\,i = a + b\,i$

$$\begin{cases} x^2 - y^2 & = a \\ 2xy & = b \\ x^2 + y^2 & = |z|^2 = |Z| = \sqrt{a^2 + b^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = \dfrac{a + |Z|}{2} \\ y^2 = \dfrac{|Z| - a}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow z = \sqrt{\frac{a + |Z|}{2}} + i\sqrt{\frac{|Z| - a}{2}} = \sqrt{\frac{a + |Z|}{2}} + \sqrt{\frac{a - |Z|}{2}}$$

mais les signes de x et y sont liés par $2xy = b$. Il suffit, d'ailleurs, d'avoir calculé x pour en déduire $y = \frac{b}{2x}$

Équation réelle du second degré à solutions complexes

Pour abréger, nous dirons : '**équation réelle**' pour 'équation polynomiale à coefficients réels', c.à.d. de la forme

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n = 0$$

où $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n \in \mathbb{R}$; de même pour 'équation complexe', etc.

Remarquons que si y est solution d'une telle équation alors on peut mettre $x - y$ en facteur : $u = x - y \implies a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n = b_0 + b_1u + \cdots + b_nu^n$ et $u = 0$ est solution $\implies b_0 = 0$ donc on factorise u (ce n'est pas le calcul le plus rapide). Une équation du 2^e degré ayant pour solutions a et b est donc une équation de la forme $\lambda(x^2 - (a + b)\,x + ab) = 0$ (en développant $(x - a)\,(x - b)$; λ est une constante).

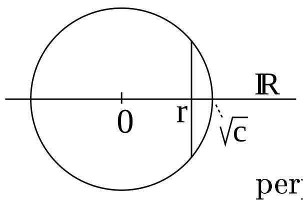
Si $z \in \mathbb{C}$ non réel est solution d'une équation réelle du 2^e degré alors $\overline{z}$ l'est aussi car $\overline{z} \sim z$. On a donc : $x^2 - (z + \overline{z})\,x + z\overline{z} = 0$.

C'est effectivement une équation réelle : posons $z = r + is,\ c = z\overline{z} = r^2 + s^2$. On obtient :

$$x^2 - 2rx + c = 0 \tag{1}$$

La résolution de cette équation est immédiate : $s^2 = c - r^2$

$$\implies \quad z = r + i\sqrt{c - r^2} = r + \sqrt{r^2 - c} \tag{2}$$



Réciproquement, pour une équation de la forme (1), si $r^2 - c < 0$ ($\implies c > 0$), il existe bien 2 nombres complexes z et $\overline{z}$ tels que $r = \text{Re}\, z,\ c = z\overline{z}$, à l'intersection de la perpendiculaire à $\mathbb{R}$ passant par r et du cercle de rayon $\sqrt{c} > |r|$. Le raisonnement précédent est donc valable, et les solutions sont de la forme (2).

Si $r^2 - c = 0$, on trouve $(x - r)^2 = 0$. r est dite "**racine double**" de l'équation.

Et si $r^2 - c > 0$, peut-on faire la même chose ? Mais si ! Grâce aux

5. Nombres doubles

Fixons une paire $P = (\alpha, \beta)$ dont les éléments seront appelés "**possibilités**". On appellera **ensemble de nombres doubles de** P et on notera $\mathcal{D}_P$ l'ensemble des couples (a, b) où $a, b \in \mathbb{R}$ et les positions (gauche/droite) dans l'écriture (a, b) représentent respectivement α et β. Le nombre double $x = (a, b)$ est le nombre qui prend respectivement les valeurs a et b suivant les possibilités α et β. Les opérations ordinaires s'effectuent de manière indépendante pour chaque possibilité, comme des opérations sur les valeurs réelles correspondantes. L'addition est donc une addition vectorielle, en considérant a et b comme les composantes de x.

Il en va autrement pour la conjugaison. Si $x = (a, b)$, on appellera **conjugué** de x le nombre $\overline{x} = (b, a)$, qui est le seul autre nombre double semblable à x si P est symétrique (les rôles de α et β sont échangés).

$$x = \overline{x} \iff a = b \implies \forall\, y = (a', b'),\ xy = (aa', bb') = (aa', ab')$$

Multiplier un nombre double y par $x = (a, a)$ revient alors à le multiplier en tant que vecteur par le réel a. Par conséquent on identifiera x au nombre réel a.

L'ensemble des nombres doubles dont les deux valeurs sont égales est ainsi identifié à $\mathbb{R}$: $x \in \mathbb{R} \iff x = \overline{x}$

De même que pour les complexes, on définit Re $x = \dfrac{x+\overline{x}}{2} = \dfrac{a+b}{2}$ (**partie réelle** de x) et $\mathrm{N}(x) = x\overline{x} = ab$ qui peut être négatif !

Si $\mathrm{N}(x) > 0$, a et b sont de même signe. Il peut être intéressant alors de définir un “module de x : $|x| = \sqrt{ab}$ ” de même signe que a et b, qui n'aura plus alors aucune ressemblance avec la valeur absolue.

Pour retrouver des calculs analogues aux nombres complexes, posons $\hat{\imath} = (1, -1)$. On a alors : $\hat{\imath}^2 = 1$ et on décompose un nombre double sous la forme $x = r + s\hat{\imath}$, où $r, s \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} a = r + s \\ b = r - s \end{cases} \iff \begin{cases} r = \dfrac{a+b}{2} \\ s = \dfrac{a-b}{2} \end{cases}$$

$$x\overline{x} = (r+s)(r-s) = r^2 - s^2$$

On remarque que les nombres $u = (1, 0)$ et $\overline{u} = (0, 1)$ vérifient : $u\overline{u} = 0$ mais $u \neq 0$ et $\overline{u} \neq 0$.

On vérifie facilement qu'une équation réelle• du 2^e degré telle que $r^2 - c > 0$ possède deux racines réelles a et b et que le nombre double (a, b) s'obtient par la même méthode qu'avec les nombres complexes pour $r^2 - c < 0$.

On remarque que dans un ensemble de complexes donné, toute équation, même complexe, du 2^e degré possède deux solutions, éventuellement confondues. Plus généralement, le théorème de D'Alembert dit que toute équation complexe de degré $n \geq 1$ possède au moins une solution, et donc elle en possède n, éventuellement confondues, par factorisation comme nous l'avons vu (p. 9).

Par contre, dans un ensemble de nombres doubles donné, une équation réelle du 2^e degré possède 0, 1 ou 4 solutions : un nombre double (a, b) est solution ssi les réels a et b le sont, donc les nombres doubles (a, a) (b, a) et (b, b) le sont également.

Pour éviter un tel désordre, on pourra définir la solution (a,b) dans un *nouvel* ensemble de nombres doubles, dit **engendré** par l'équation, dont la paire des possibilités est définie par la paire des solutions réelles de cette équation. Si on avait affaire à la même équation une nouvelle fois, elle engendrerait encore un nouvel ensemble de nombres doubles (ce qui donnerait des nombres quadruples...).

6. Nombres algébriques

On appellera **ensemble de nombres algébriques** un ensemble que l'on peut imaginer (d'une infinité de manières possibles) comme l'ensemble des solutions de toutes les équations rationnelles• dans un ensemble de complexes donné, *moins* les dissymétries dues à ce point de vue. Prenons $\mathbb{A}$ un ensemble de nombres algébriques général. $\mathbb{A}$ ne possède aucune topologie. Une équation rationnelle du 2^e degré, par exemple, possède dans $\mathbb{A}$ soit 2 solutions rationnelles éventuellement confondues, soit 2 solutions non rationnelles, semblables et distinctes.

On peut démontrer que si a et b sont algébriques et $b \neq 0$, alors $a+b$, ab et $\dfrac{a}{b}$ sont aussi algébriques, et que les solutions d'une équation à coefficients algébriques sont algébriques.

Deux nombres algébriques sont semblables s'il n'existe pas d'équation rationnelle dont un seul des deux serait solution. Il est impossible, alors, de les distinguer à l'aide des signes $+, -, \times, \div, =$, de phrases du genre "$\exists x, y, \ldots \in \mathbb{A}$ tels que..." et des nombres rationnels (mais sans exponentielle ni logarithme).

Exemple : $\sqrt{2}$ et $-\sqrt{2}$ sont semblables, et leurs racines carrées le sont aussi : $\sqrt[4]{2} \sim i\sqrt[4]{2} \sim -\sqrt[4]{2} \sim -i\sqrt[4]{2}$. Il y a des nombres "réels" semblables *en tant que nombres algébriques* à des nombres complexes qui ne le sont pas réels !

7. Espaces doubles

Soient un espace E de dimension n, et deux sous-espaces F et G de dimensions p et q. On note $F+G$ l'ensemble des $x \in E$ de la forme $y+z$ ($y \in F,\ z \in G$). Supposons $F \cap G = \{0\}$. Alors cette écriture est unique : $y+z = y'+z' \Rightarrow y-y' = z'-z \in F \cap G \Rightarrow y = y',\ z = z'$ et $\dim(F+G) = p+q$ (on le vérifie en prenant des bases...).

Supposons de plus que $n = p+q$. Alors $E = F+G$. (En effet, un sous-espace H de E de même dimension que E est égal à E. Sinon, $\exists\, x \in E,\ x \notin H \Rightarrow \mathbb{R}x \cap H = \{0\} \Rightarrow E$ contiendrait un sous-espace de dimension n+1 !). On dit alors que F et G sont des sous-espaces **supplémentaires**.

On appellera **espace double** un espace muni d'une paire de deux sous-espaces supplémentaires. À partir de deux espaces F et G quelconques, on peut construire un tel espace double $E = F \oplus G$, appelé **somme directe** de F et G, comme étant l'ensemble des couples (y,z) avec $y \in F,\ z \in G$. On identifiera $y = (y,0)$ et $z = (0,z)$, pour pouvoir écrire $x = y+z$.

On peut noter que E^* est muni de la paire $(F^\perp, G^\perp)$; ils sont supplémentaires : $f \in F^\perp \cap G^\perp \Rightarrow (\forall\, y \in F,\ z \in G,)\ <f\,|\,y+z> = <f\,|\,y> + <f\,|\,z> = 0 \Rightarrow f = 0$ et $\dim G^\perp = p,\ \dim F^\perp = q$. Enfin, E/G donne une image fidèle de F : $\dim E/G = p$ et si $y,\ y' \in F$ ont la même image dans E/G, alors $y - y' \in F \cap G \Rightarrow y = y'$.

On identifiera F à E/G : les sous-espaces F de E et $G^\perp$ de E^* seront considérés comme le dual l'un de l'autre, le produit scalaire y étant défini comme ayant la même valeur qu'en considérant les éléments dans E et E^*.

Les choses se réorganisent de la manière suivante :

$E = F \oplus G \Rightarrow E^* = F^* \oplus G^*$ et $\forall\, x = (y,z) \in E,\ f = (g,h) \in E^*$,

$$<f\,|\,x> = <g\,|\,y> + <h\,|\,z>$$

On définit la multiplication d'un vecteur par un nombre double $\lambda = (a,b)$: $\lambda x = (ay, bz)$. Remarque : la paire des possibilités est identifiable• à (F,G).

On pourra également définir le **produit scalaire double** :

$$\ll f\,|\,x \gg = (<g\,|\,y>, <h\,|\,z>) \quad \Rightarrow \quad <f\,|\,x> = 2\ \mathrm{Re} \ll f\,|\,x \gg$$

Compléments

• La multiplication par $\hat{\imath} = (1,-1)$ s'appelle symétrie par rapport à F parallèlement à G.

La multiplication par $u = (1, 0)$ s'appelle **projection sur F parallèlement à G.**

• Pour des sous-espaces F et G quelconques de E,

$$\dim(F+G) + \dim(F\cap G) = \dim F + \dim G$$
$$(F+G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$$
$$(F\cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$$

• On remarque que le fait de munir un espace affine d'une origine O pour en faire un espace vectoriel se traduit par le fait de prendre le quotient $E/\mathbb{R}O$, en lequel l'espace affine et l'espace des vecteurs• s'identifient.

• Soit F un sous-espace d'un espace E. La notion d'image d'un vecteur de E dans le quotient E/F prend le nom de **restriction** lorsqu'on échange les appellations "vecteur" et "forme linéaire". Soit $F_1 = F^\perp$, sous-espace de $E_1 = E^*$. Pour tout $x \in E$, qui est pour E_1 une forme linéaire, son image x' dans $E/F = F_1^*$ est définie par : $\forall\, v \in F_1,\ <x'\,|\,v> = <x\,|\,v>$. On l'appelle **restriction de x à F_1.**

Imaginons par exemple $\dim E_1 = 3, \dim F_1 = 2$. Les droites de niveaux de x' seront les droites d'intersection de F_1 avec les plans de niveaux correspondants de x.

8. Grandeurs affines

On appellera **grandeur affine** une droite affine.

Pour être plus précis, G étant une grandeur, on dira que 'A est une **grandeur affine sur** G' si G est l'espace des vecteurs de A. Ses éléments seront appelés des **quantités affines sur** G.

9. Infiniment petits, infiniment grands

Les quantités de certaines grandeurs seront appelées **nombres infiniment petits**, celles d'autres grandeurs **nombres infiniment grands** (c'est un rôle qu'on leur fait jouer). Ces grandeurs, avec $\mathbb{R}$, forment un système•. Pour simplifier, fixons une grandeur D de 'nombres infiniment petits', et considérons la grandeur L des longueurs. Soient $n \in \mathbb{N}_\star$, et $a \in D^n$(resp. $D^n L$). On dira que a est un nombre (resp. une longueur) infiniment petit(e) **d'ordre** n. (de même avec D^{-n} : infiniment grand(e) d'ordre n).

Remarque : tous les éléments d'un même signe de D sont semblables, et D ne peut pas être une grandeur normée. En effet, ses éléments sont tellement petits qu'on ne sait plus où on en est dans la petitesse, et on ne peut pas les mesurer dans l'absolu.

10. Logarithme, exponentielle

Soient H une demie-grandeur générale d'une grandeur G orientée et A une grandeur affine sur $\mathbb{R}$ générale. Nous allons voir que H et A ont, à une traduction près, la même géométrie.

Chacun a tous ses éléments semblables, et si on le munit d'un de ses éléments, (une origine pour A, une unité pour H), il n'a plus d'éléments semblables. Le rôle que joue un élément par rapport à un autre est défini respectivement par leur différence et leur quotient.

On reconnaît la structure de grandeur affine de H dans ceci : on peut le graduer de manière à le diviser tout entier en une suite d'intervalles semblables, infinie de part et d'autre, définis par le rapport $\frac{y}{x} = r$ entre deux graduations x et y consécutives ; et on peut rendre les graduations aussi fines que l'on veut en choisissant r suffisamment proche de 1 (on pourra prendre $r > 1$ pour que : $\frac{y}{x} = r \implies y > x$). H a aussi la topologie d'une droite : c'est une simple ligne continue, ne comprenant pas ses extrémités.

Lorsqu'on considèrera H en tant que grandeur affine, on l'appellera **logarithme de** H (ou : de G) et on le notera $\log H$ (ou : $\log G$) ; un élément $x \in H$, en tant que quantité affine ($\in \log H$) sera noté $\log x$ (logarithme de x). L'unité $1 \in \mathbb{R}$ servira d'origine à $\log \mathbb{R}$ ($\log 1 = 0$), pour que l'on puisse écrire $\forall\, a, b \in \mathbb{R}_\star^+$, $\log(ab) = \log a + \log b$. De même pour $a \in \mathbb{R}_\star^+$ et $x \in H$: $\log(ax) - \log x$ représente la position de ax par rapport à x, qui est celle de a par rapport à 1. $\log(ax) - \log x = \log a - \log 1 = \log a$.

$$\log(ax) = \log a + \log x \tag{3}$$

Réciproquement, si $y = \log x$, on notera : $x = \exp y$ (**exponentielle**).

$$\forall\, r \in \mathbb{R}_\star^+,\ n \in \mathbb{Z}, \log(r^n) = n \log r \implies n = \frac{\log(r^n)}{\log r}$$

C'est la mesure de $\log(r^n)$ en prenant $\log r$ comme unité.

On définit ainsi le **logarithme en base** r de a :

$$\log_r a = \frac{\log a}{\log r}$$

donc : $x = r^n \iff n = \log_r x$. On généralise en notant $\forall\, a \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} r^a = \exp(a \log r) &\iff \log_r(r^a) = a \\ &\iff \log r^a = a \log r \end{aligned} \tag{4}$$

En particulier, $r^{\frac{1}{2}}$ est la racine carrée positive de r.

On en déduit : $\forall\, a, b \in \mathbb{R}, \quad \forall\, r \in R_\star^+, \quad r^{ab} = (r^a)^b$ et $r^{a+b} = r^a r^b$

11. Nombre e, logarithme népérien

Les différentes valeurs de $\log r$ ($r \in \mathbb{R},\ r > 1$) (qui sont les éléments positifs de $\log \mathbb{R}$) sont toutes dissemblables ; $\log \mathbb{R}$ est donc identifiable à $\mathbb{R}$, mais il faut décider l'unité choisie. L'utilisation de la fonction $\log_r$ revient à choisir $\log(r)$ comme unité. Mais nous allons voir une unité privilégiée, qui se définit en considérant des intervalles infiniment petits.

On remarque que plus on considère une portion de H de petite taille relativement à sa distance à 0, et plus sa géométrie affine (logarithmique) s'y trouve fidèlement représentée : étant donnés x, x', y, y' tels que $\frac{x'}{x} = \frac{y'}{y}$, alors $y' - y = \frac{y}{x}(x' - x)$

donc les intervalles $[xx']$ et $[yy']$ apparaissent d'autant mieux comme étant de même taille que $\frac{y}{x}$ est proche de 1, donc que l'on se trouve sur une portion relativement petite de H. Pour idéaliser la situation, imaginons un intervalle $[xx']$ infiniment petit, et notons 'dx' la quantité infiniment petite $dx = x' - x$. Soient $a = \log x,\ a' = \log x'$. $[aa']$ est un intervalle de longueur $da = a' - a$ qui sera un 'nombre infiniment petit' dès qu'on aura choisi l'unité de $\log \mathbb{R}$. Infiniment près de x, la géométrie affine est respectée, donc dx est proportionnel à da. D'autre part, da étant fixé, $\frac{x'}{x} = \frac{y'}{y} \implies \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$. Effectivement, da exprime une variation relative de x. On choisira l'unité de $\log \mathbb{R}$ telle que

$$da = \frac{dx}{x} \iff dx = x\, da \tag{5}$$

On vérifie : $da \in D,\ x \in G,\ dx = x\, da \in DG$.

Cela définit le **logarithme népérien**, $\ln = \log_e$, avec $e \approx 2,71828$.

$$\ln x = \log_e x = \frac{\log x}{\log e}$$

Le mot 'exponentielle' sous-entend généralement que l'on a pris la base e. Ainsi, $\forall\, x \in \mathbb{R}_\star^+,\ a = \ln x \iff x = \exp a = e^a$. La même chose pourra s'écrire à partir de n'importe quelle quantité positive x ou de n'importe quel a quantité affine sur $\mathbb{R}$.

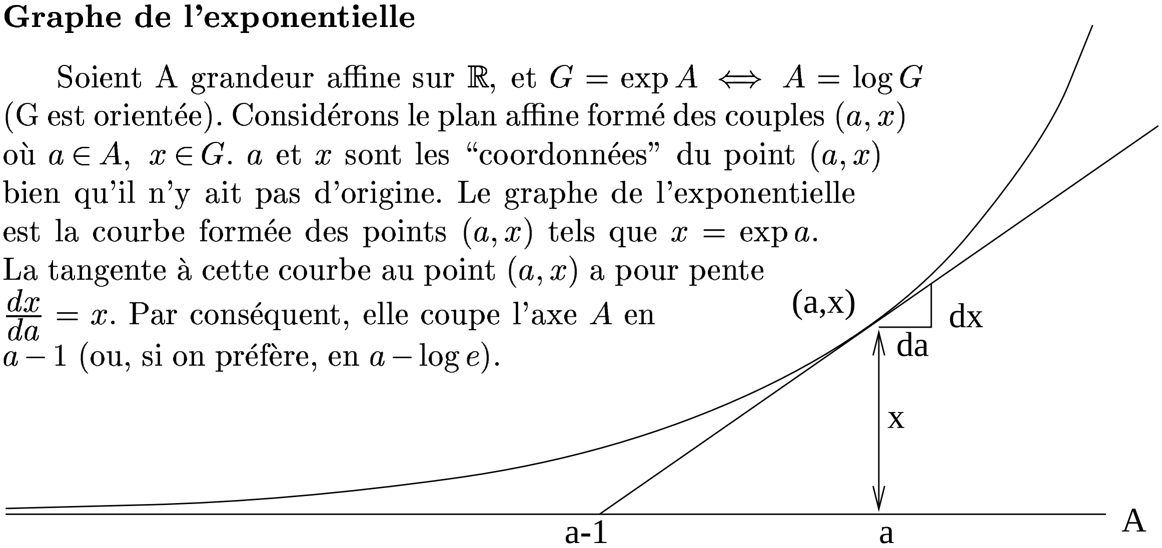
Remarque : appliquons (5) à $x = 1,\ a = 0$:

$$x' = 1 + dx = e^{a'} = e^{da} \ \text{ et } \ dx = da \implies e^{da} = 1 + da$$
$$\implies e^{da - da} = e^0 = 1 = e^{da} e^{-da} = (1 + da)(1 - da) = 1 - (da)^2$$

$(da)^2$ étant un infiniment petit d'ordre 2 est en fait trop petit pour être pris en considération.

Graphe de l'exponentielle

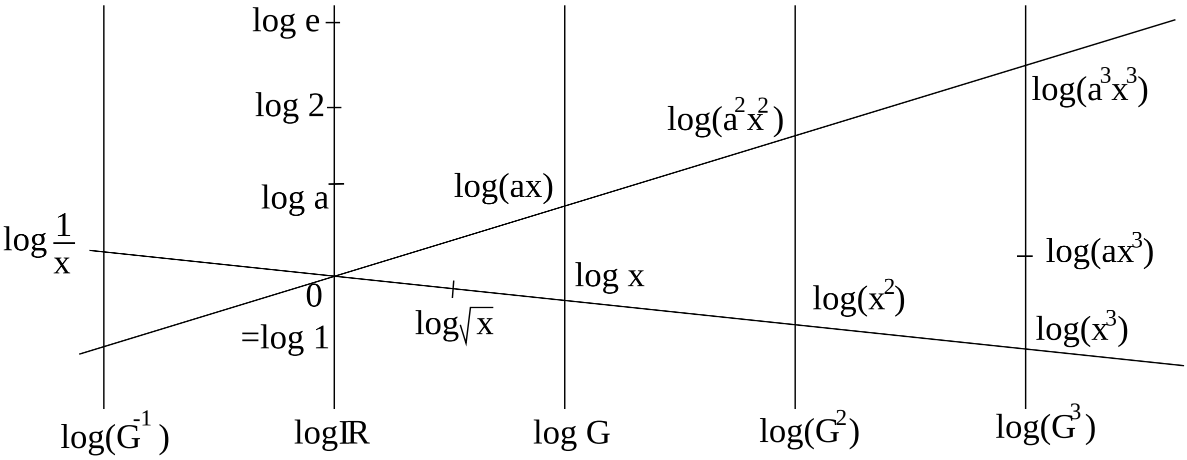
Soient A grandeur affine sur $\mathbb{R}$, et $G = \exp A \iff A = \log G$ (G est orientée). Considérons le plan affine formé des couples (a, x) où $a \in A,\ x \in G$. a et x sont les "coordonnées" du point (a, x) bien qu'il n'y ait pas d'origine. Le graphe de l'exponentielle est la courbe formée des points (a, x) tels que $x = \exp a$. La tangente à cette courbe au point (a, x) a pour pente $\frac{dx}{da} = x$. Par conséquent, elle coupe l'axe A en $a - 1$ (ou, si on préfère, en $a - \log e$).



12. Représentation logarithmique des quantités positives

$\log G$ étant une grandeur affine sur $\mathbb{R}$, se représente par une droite d'un plan vectoriel, qui ne passe pas par 0. Sa parallèle passant par 0 est $\log \mathbb{R}$ qu'on peut identifier à $\mathbb{R}$. Les formules (3) et (4) se généralisent aux quantités positives, devenant des formules vectorielles : pour tous x et y positifs, $\forall\, a \in \mathbb{R}$,

$$\log(xy) = \log x + \log y \quad \text{et} \quad \log(x^a) = a\ \log x$$



Les différentes puissances de G se représentent donc logarithmiquement par des droites parallèles d'un plan vectoriel. De même, à partir de n grandeurs orientées indépendantes (comme la masse, la longueur et le temps), on représente toutes les quantités positives du système de grandeurs qu'elles engendrent dans un espace vectoriel E de dimension $n+1$. On vérifie "l'homogénéité" d'une équation en ne retenant que la grandeur G d'une quantité $x \in G$, donc l'image $(\log G)$ de $\log x$ dans l'espace quotient $E/\log \mathbb{R}$.

Un système d'unités est la donnée d'une unité pour chacune de ces n grandeurs fondamentales (par ex. le kilogramme, le mètre, la seconde), ce qui, avec une base du logarithme, donne une base de E. Exemple : la masse volumique de l'eau $\mu = 10^3$ kg m^{-3} se décompose en $\log \mu = 3\ \log 10 + \log(\mathrm{kg}) - 3\ \log(\mathrm{m})$. On remarque que c'est la composante suivant $\log \mathbb{R}$ dans cette base qui renseigne sur la valeur numérique de toute quantité. C'est une forme linéaire f qui vérifie $< f \,|\, 1 > = 1$ où "1" est l'unité choisie de $\log \mathbb{R}$. L'ensemble des manières possibles f de numériser les quantités forme ainsi un espace affine de dimension n.

Remarquons enfin ce qui se passe lorsqu'intervient une constante universelle : prenons la vitesse de la lumière $c = 3.10^8$ m s^{-1}. On peut alors identifier les grandeurs longueur et temps, confondant une seconde avec une seconde-lumière (300 000 km). Cela revient à prendre l'espace quotient $E/(\mathbb{R} \log c)$ comme nouvel espace E. Les f compatibles avec cette identification sont ceux qui sont orthogonaux à $\log c$: $< f \,|\, \log c > = 0$ pour avoir "$c = 1$ selon f". Ils forment donc un sous-espace affine de dimension $n-1$ du précédent.

13. Exponentielle complexe

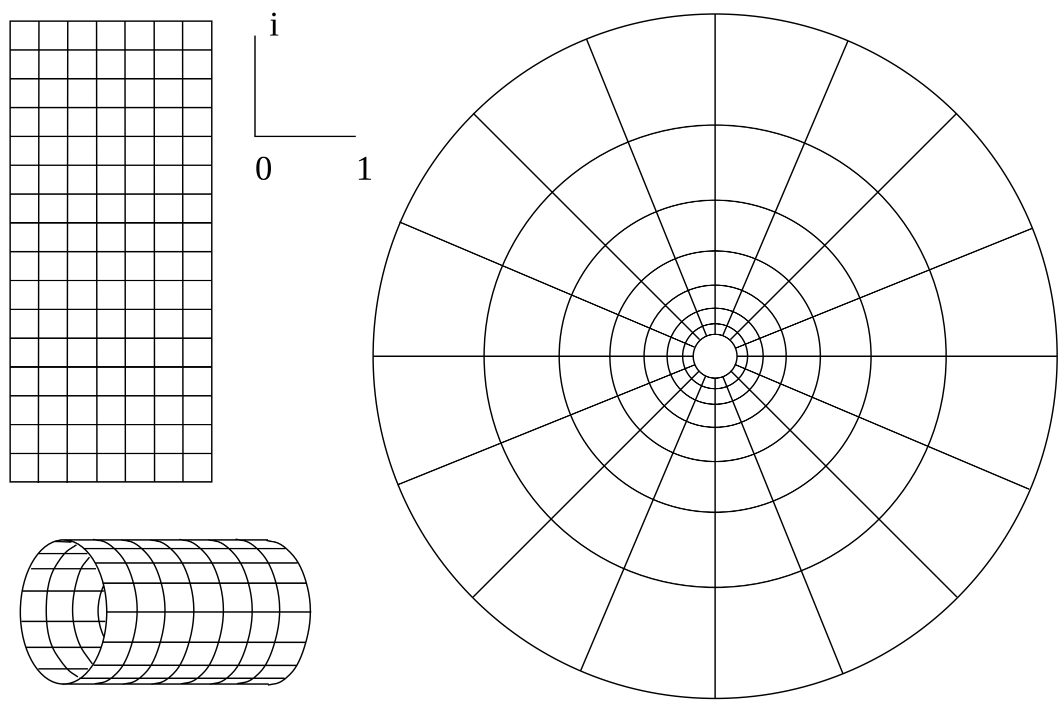
Nous allons définir l'exponentielle avec les complexes en sorte que les mêmes relations soient valables qu'avec les réels. Commençons par définir l'exponentielle d'un nombre complexe :

$$e^{a+b\,i} = e^{a}e^{b\,i} \text{ avec } \left|e^{b\,i}\right|^2 = e^{b\,i}\,e^{\overline{b\,i}} = e^{b\,i}e^{-b\,i} = e^{b\,i-b\,i} = e^{0} = 1$$

L'exponentielle d'un réel étant connu, il reste à préciser la valeur de $e^{b\,i}$ qui est de module 1 et définit donc une rotation : soient y une quantité (complexe) affine sur $\mathbb{C}$, $y' = y + b\,i$, $x = \exp(y)$, $x' = \exp(y') = e^{b\,i}x$. Pour une valeur de b infiniment petite (db), on déduit de (5) : $dx = x\;db\;i$. Cela exprime un déplacement de direction perpendiculaire à x, ce qui est normal pour une rotation. De plus, on peut confondre la longueur orientée dl de l'arc de cercle parcouru (positive ou négative selon le sens de parcours) dans cette rotation, avec $|x|\;db$ $(= \pm|dx|)$ (l'erreur est d'ordre 3). Cette longueur s'additionne en même temps que b. On en déduit $l = |x|\,b$. b est donc l'angle orienté de la rotation, exprimé en radians.

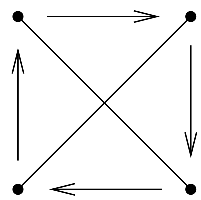
$$z = e^{a+b\,i} \implies |z| = e^{a}\ (a = \log|z|) \implies e^{b\,i} = \frac{z}{|z|}$$

On dira que b est un **argument** de z lorsque $e^{b\,i} = \frac{z}{|z|}$ qui est l'intersection de $[0\,z)$ avec le cercle de centre 0 et de rayon 1, appelé cercle trigonométrique. C'est un angle orienté des demi-droites $[0\;1)$ et $[0\,z)$. Les arguments de z sont alors les nombres de la forme $b + 2\pi n$ où $n \in \mathbb{Z}$.



$e^{b\,i}$ s'obtient à partir de b en enroulant $\mathbb{R}$ sur le cercle trigonométrique, à l'infini de chaque côté, après avoir placé 0 en 1. Plus généralement, l'exponentielle d'une grandeur A affine sur $\mathbb{C}$ consiste à prendre l'ensemble quotient• $A/(2\pi i\mathbb{Z})$ (où $2\pi i\mathbb{Z}$ est l'ensemble des $2\pi ni$ pour n décrivant $\mathbb{Z}$), obtenu en enroulant A à l'infini sur un cylindre de rayon 1, puis à le déformer en une grandeur complexe G privée de 0 de la manière qui convient.

Peut-on, à l'inverse, définir le logarithme A d'une grandeur complexe G ? Si toutes les directions de G sont semblables, on peut certes définir un "A roulé en cylindre", mais A lui-même ne peut pas être extrait• de G. En effet, on peut démontrer que $\forall\, a, b \in A$ tels que $b - a$ est imaginaire pur, alors $b \sim a$. Tous les logarithmes d'une quantité de G sont semblables, donc on ne peut en définir un particulier à partir de G. Ou, pour utiliser l'autre définition du mot "extrait" : soit une grandeur E affine sur $\mathbb{R}$, munie d'un ensemble F de graduations tous les 2π, défini par $\forall\, x \in F,\ \exp(x\, i) = 1$, et A' l'ensemble des $a + x\, i$ ($a \in A,\ x \in E$), où l'on définit $\forall\, a' \in A',\ \exp(a') = \exp(a' - x\, i)$ indépendamment de $x \in F$. Alors $A' \sim A$ vis-à-vis de G, mais A' n'est pas identifiable à A.



Le même phénomène se retrouve dans l'exemple plus simple suivant : soit E un ensemble à 4 éléments muni d'une permutation circulaire (par exemple l'ensemble des sommets d'un carré muni d'un sens de rotation), et P la paire des deux paires d'éléments opposés de E. E n'est pas extrait de P, mais on ne peut toucher à E sans détruire la symétrie de P. En effet, si P reste symétrique, un élément de E est semblable à un de l'autre paire d'éléments opposés, donc un élément de E est semblable à son suivant, lequel doit avoir la même propriété d'être semblable à son suivant, etc. donc tous les éléments de E sont semblables.

Pour en revenir au logarithme d'une quantité complexe, il ne reste qu'à le définir comme un élément du cylindre, c'est-à-dire de $A/(2\pi i\mathbb{Z})$. $\forall\, x \in G_\star,\ \log x$ sera l'ensemble des $a \in A$ tels que $\exp a = x$, l'ensemble A étant fixé au départ.

14. Trigonométrie

On définit les fonctions trigonométriques **sinus, cosinus, tangente**, par

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ e^{xi} = \cos x + i \sin x \quad \text{et} \quad \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}.$$

De même, avec les nombres doubles, on définit les **sinus hyperbolique, cosinus hyperbolique**, et **tangente hyperbolique** par :

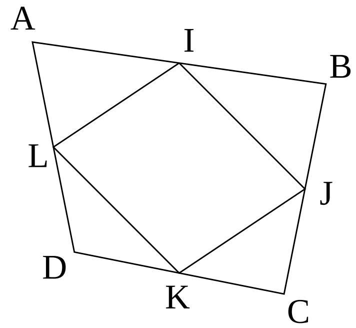
$$e^{x\hat{\imath}} = \operatorname{ch} x + \hat{\imath} \operatorname{sh} x \quad \text{et} \quad \operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$$

$$\Rightarrow \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{et} \quad \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \quad \text{et} \quad \operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$$

Exercices

Exercice 1



Voici un sujet qui a été étudié, je crois, à Maths en Jeans. Je ne sais pas combien de temps y a été passé, mais en voici une résolution quasi-immédiate.

Soit un polygone $IJK...$ à n côtés. Peut-on trouver un polygone $ABC...$ à n côtés dont les milieux successifs soient I, J, K, etc. ?

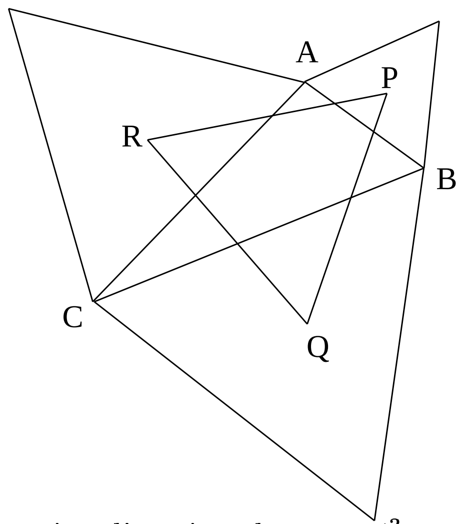
Solution : I est le milieu de $[AB] \iff 2I = A + B \iff A = 2I - B$

De même, $B = 2J - C$, etc. $\Rightarrow A = 2I - 2J + C = \cdots$

Si n est pair, par exemple $n = 4$, on trouve $A = 2I - 2J + 2K - 2L + A \iff I + K = J + L$. Cela revient à dire que $\{I, K\}$ et $\{J, L\}$ ont même isobarycentre (ou dans le cas particulier $n = 4$ que $IJKL$ est un parallélogramme). Cela signifie que dans ce cas, on peut construire une solution à partir de n'importe quel point A. Dans le cas contraire, il n'y a pas de solution.

Si n est impair, par exemple $n = 5$, on trouve $A = 2I - 2J + 2K - 2L + 2M - A \iff A = I + K + M - J - L$. Ce point A est alors celui qui donne la seule solution.

Exercice 2



Soit un triangle ABC quelconque d'un plan affine euclidien. On note P, Q, R les centres des triangles équilatéraux construits vers l'extérieur à partir de chacun de ses côtés. Démontrer que PQR est un triangle équilatéral.

La revue Quadrature n°16, p. 32, en donne plusieurs démonstrations, mais en voici une autre. On va utiliser le fait qu'un plan affine euclidien n'est autre qu'une grandeur complexe affine.

Soit j un nombre complexe représentant une rotation d'un tiers de tour : $j^3 = 1$ mais en factorisant la solution $j = 1$ on trouve : $j^2 + j + 1 = 0$. Choisissons-en la solution telle que $B - P = j(A - P)$ (imaginer l'origine en P).

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l|l} (j-1)P = jA - B & \times j^2 \\ (j-1)Q = jB - C & \times j \\ (j-1)R = jC - A & \times 1 \end{array} \right.$$

$\Rightarrow j^2P + jQ + R = 0$ (car $j - 1 \neq 0$) $\Rightarrow R - P = -j(Q - P)$.

Donc PQR est un triangle équilatéral.