Rappels de théorie des ensembles

Produits et ensembles d'applications

Pour un ensemble E, la bijection naturelle entre le produit cartésien $E \times E$ et l'ensemble $E^{\{1,2\}}$ des applications de $\{1,2\}$ dans E se définit par

$$f : \{1,2\} \to E \quad \leftrightarrow \quad (f(1), f(2)).$$

On pourrait définir ainsi un couple comme étant un cas particulier d'application, plutôt qu'une application comme étant un cas particulier de relation où une relation est un ensemble de couples.

Plus généralement, n'a-t-on pas déjà l'habitude de passer continument d'une convention à l'autre quand on écrit

$$(x_1, \cdots, x_n) = (x_i)_{i=1,\cdots n} = (x_i)_{i \in I} \text{ où } I = \{1, \cdots, n\}$$

après avoir défini la notion de famille $(x_i)_{i\in I}$ comme étant synonyme d'application de I dans E, avec x_i synonyme de $x(i)$. En fait un couple est une application définie sur l'ensemble des deux positions (gauche, droite) dans la parenthèse.

Pour une famille d'ensembles $(E_i)_{i\in I}$, on définit sa somme (ou union disjointe) et son produit par

$$\coprod_{i\in I} E_i = \{(i,x) | i \in I,\ x \in E_i\}$$
$$\prod_{i\in I} E_i = \{(x_i)\{i \in I\} | \forall i \in I, x_i \in E_i\}$$

L'axiome du choix se formule également par "Tout produit d'ensembles non vides est non vide".

Ces conventions ainsi que la notation F^E pour désigner l'ensemble des applications de E dans F se justifient par le fait que pour le cas d'ensembles finis, le cardinal d'une somme est la somme dans $\mathbb{N}$ des cardinaux, le cardinal d'un produit est le produit des cardinaux, $\#(F^E) = (\#F)^{(\#E)}$, et toutes les identités remarquables reliant ces opérations dans $\mathbb{N}$ correspondent ici à des bijections canoniques entre ensembles ainsi construits:

On a des bijections canoniques entre ensembles suivant la commutativité et l'associativité de l'addition et de la multiplication, les propriétés du zéro (ensemble vide) et du 1 (singleton), et les développements de la puissance d'une somme et d'un produit.

On a même rigoureusement suivant les conventions ci-dessus $\coprod_I E = I \times E$ et $\prod_I E = E^I$ (assimilant une famille à une application).

Ces identités entre entiers pouvant servir à définir par récurrence les opérations en question, ceci démontre toutes ces relations énoncées entre cardinaux dans le cas d'ensembles fini (une bijection entre ensembles impliquant l'égalité des cardinaux).

Regardons plus particulièrement pour des ensembles E, F et G la bijection canonique entre $G^{E\times F}$ et $(G^F)^E$: à l'opération f sur les variables (x, y) correspond l'application $\hat{f} \in (G^F)^E$ qui fixe x pour obtenir une fonction de y:

$$\forall x \in E\ \forall y \in F, \hat{f}(x)(y) = f(x, y).$$

De même, on notera $\check{f} \in (G^E)^F : y \mapsto (x \mapsto f(x, y))$, autrement dit $\forall x \forall y, \check{f}(y)(x) = f(x, y)$.

Exemple: Soit $\varphi : E^I \times I \to E$ définie par $\hat{\varphi} = \mathrm{Id}_{E^I}$. Alors $\check{\varphi}$ est la famille des projections de E^I sur E: $\forall i \in I, \check{\varphi}(i) = \pi_i$.

Inclusions et injections canoniques

L'injectivité d'une application $f \in F^E$ se réécrit par contraposition d'une manière peut-être plus intuitive sous la forme

$$\forall x, x' \in E, (x \neq x') \Rightarrow (f(x) \neq f(x')).$$

Une opération est dite canonique (de même que les bijections canoniques précédentes) si elle s'exprime par une formule la plus simple possible et ne faisant pas intervenir de paramètres (variables libres ou autres objets hors contexte ou non définis entièrement).

Quant on parle d'ensembles munis d'une certaine opération, cela signifie qu'on considère cette opération comme canonique, et donc par suite aussi toutes les autres opérations qu'on pourra définir à partir d'elle.

L'inclusion est le cas le plus simple d'injection canonique. L'application de E dans $E \times F$ qui à x associe $(x, 0)$ est un autre exemple, grâce au symbole de constante 0 dont on dispose dans l'espace vectoriel F.

Une bijection canonique entre deux ensembles disjoints permet de les identifier, à condition de ne pas confondre les structures éventuelles de l'un avec celles de l'autre si elles ne sont pas préservées par cette bijection. Identifier F à E par une bijection canonique f de E sur F consiste à représenter chaque variable y de F par une variable de E en écrivant dans une formule $f(x)$ au lieu de y où x est une variable de E, puis à "rentrer les f" ainsi apparus dans les autres opérations, représentant les opérations avec F par les opérations correspondantes avec E transportées par f.

Pour éviter tout danger de confusions, on ne se permet de faire des identifications qu'entre des ensembles disjoints.

Une injection canonique j de A dans E constitue une bijection canonique de A sur son image qui est une partie de E. Ceci permet d'identifier A à cette partie, ce qui réduit j à l'inclusion de $j(A)$ dans E. Inversement, une partie A d'un ensemble E peut être dissociée de cet ensemble en faisant une copie A' de A disjointe de E et donc munie d'une injection canonique de A' dans E d'image A. Un tel procédé a déjà été vu plus haut, avec la notion d'union disjointe d'une famille d'ensembles, qui est l'union d'une famille de copies disjointes des ensembles initiaux.

Démonstration du théorème 5 généralisé aux familles infinies

On rappelle que $K^{(I)}$ est le sous-espace vectoriel de K^I engendré par la famille (e_i) définie par $e_i(j) = \delta_{ij}$, qui est une famille libre et donc appelée la base canonique de $K^{(I)}$. Si (et seulement si) I est fini alors $K^{(I)} = K^I$.

Le théorème s'énonce: Soit un K-ev E et une famille quelconque $(x_i)_{i\in I}$ d'éléments de E. Alors il existe une unique application linéaire f de $K^{(I)}$ dans E telle que $\forall i \in I,\ f(e_i) = x_i$ où (e_i) est la base canonique de $K^{(I)}$; elle s'écrit

$$f((a_i)) = \sum_{i\in I|a_i\neq 0} a_i x_i.$$

On l'appelle l'application linéaire associée à la famille (x_i).

Voici la démonstration:

1) Unicité: on montre que toute application linéaire f vérifiant cette condition s'écrit suivant la formule donnée (laquelle a un sens sans utiliser d'ordre sur I grâce au fait que l'addition est commutative et associative):

$$f((a_i)) = f(\sum_{i\in I|a_i\neq 0} a_i e_i) = \sum_{i\in I|a_i\neq 0} a_i x_i.$$

Or il n'existe qu'une seule application f obéissant à cette formule, donc f est unique.

2) Existence. Vérifions que l'application f définie par cette formule est bien solution du problème.

On voit immédiatement que $f(e_i) = x_i$.

Vérifions qu'elle est linéaire. Soient $(a_i), (b_i) \in K^{(I)}$, $c \in K$. Soit $J = \{i \in I | a_i \neq 0 \text{ ou } b_i \neq 0\}$, qui est fini. Alors

$$f((a_i) + c(b_i)) = f((a_i + c\, b_i)) = \sum_J (a_i + c\, b_i) x_i = \sum_J a_i x_i + c \sum_J b_i x_i = f((a_i) + c\, f((b_i)).$$

□