Sylvain Poirier
Mias 2, Septembre 2003

Algèbre linéaire

3. Dualité

1. Notion d'espace dual

Définition. *Soit un K-ev E. Le K-ev $L(E, K)$ est appelé le dual de E et noté E^*; ses éléments (applications linéaires à valeurs dans K) sont appelées des formes linéaires.*

Représentation géométrique des formes linéaires

Définition. *Dans un K-ev E on appelle hyperplan tout sous-K-ev de E de codimension 1.*

Donc si E est de dimension finie n, les hyperplans sont les sous-K-ev de dimension $n - 1$.

Théorème. *Le noyau d'une forme linéaire non nulle est un hyperplan.*

Remarquons que l'image d'une forme linéaire $u \in E^*$ est un sous-espace vectoriel de K, or K n'a que deux sous-espaces vectoriels qui sont lui-même et $\{0\}$, et $\mathrm{Im}\, u = \{0\}$ ssi $u = 0$. Donc si u est non nulle alors u est surjective. Dans ce cas, u définit un isomorphisme de $E/\operatorname{Ker} u$ sur K. Donc $\dim(E/\operatorname{Ker} u) = 1$, autrement dit $\operatorname{Ker} u$ est un hyperplan. □

Exemple: dans K^n (ou K^I en général), chaque fonction coordonnée (projection sur une composante $\pi_k : (a_i)_{i\in I} \mapsto a_k$ pour un $k \in I$), est une forme linéaire. De même pour tout espace vectoriel muni d'une base, qui l'identifie à K^n. Le noyau de cette forme linéaire est l'hyperplan engendré par les autres vecteurs de la base.

Pour finir de caractériser une forme linéaire u, il suffit de préciser quel est l'isomorphisme de $E/\operatorname{Ker} u$ sur K. Il suffit pour cela par exemple de connaître sa valeur en un vecteur arbitraire $x \notin \operatorname{Ker} u$. Mais pour ne pas faire d'arbitraire inutile, remarquons que K a un autre élément privilégié que 0, qui est 1. On peut donc canoniquement représenter u par $u^{-1}(1)$ qui est un hyperplan affine parallèle à $\operatorname{Ker} u$. (Se rappeler en effet de la relation d'équivalence $u(x) = u(x') \Leftrightarrow x - x' \in \operatorname{Ker} u$).

Définition. *Soient E et F deux K-ev et $f \in L(E, F)$. On appelle* transposée de f *l'application*

$$\begin{aligned} {}^t\!f : F^* &\to E^* \\ u &\mapsto u \circ f. \end{aligned}$$

Propriétés. *La transposition est linéaire de $L(E, F)$ dans $L(F^*, E^*)$.*
Si f est surjective alors ${}^t\!f$ est injective.
Si f est un isomorphisme alors ${}^t\!f$ également et $({}^t\!f)^{-1} = {}^t(f^{-1})$.
Lorsque cela a un sens, ${}^t(g \circ f) = {}^t\!f \circ {}^t\!g$.

Vérification immédiate. □

Rappelons que l'application qui à tout $f \in L(K^{(I)}, E)$ associe la famille $(x_i) = (f(e_i)) \in E^I$ où $e_i(j) = \delta_{ij}$ est un isomorphisme de $L(K^{(I)}, E)$ sur E^I, que f est dite l'application linéaire associée à (x_i), et que (x_i) est une base si et seulement si f est un isomorphisme.

Théorème. *Pour tout ensemble I, on a un isomorphisme canonique de $(K^{(I)})^*$ sur K^I défini par*

$$\begin{aligned} \psi : (K^{(I)})^* &\xrightarrow{\sim} K^I \\ u &\mapsto (u(e_i))_{i\in I}. \end{aligned}$$

Démonstration: c'est le cas particulier du rappel ci-dessus pour $E = K$. □

Théorème. *Soit E un K-ev, et $(x_i)_{i\in I}$ une base de E. Alors l'application φ de E^* dans K^I qui à tout $u \in E^*$ associe $(u(x_i))$ est un isomorphisme.*

Démonstration: C'est simplement l'isomorphisme ψ de $(K^{(I)})^*$ sur K^I ci-dessus transporté par l'isomorphisme f de $K^{(I)}$ sur E associé à cette base, donc défini par $\forall i, f(e_i) = x_i$.

En effet, l'isomorphisme $\varphi = \psi \circ {}^t f$ de E^* sur K^I vérifie

$$\forall u \in E^*, \psi \circ {}^t f(u) = \psi(u \circ f) = (u \circ f(e_i)) = (u(x_i)).$$

□

Corollaire. *Si E est de dimension finie alors E^* aussi et $\dim E^* = \dim E$.*

En effet, un K-ev de dimension finie n est un K-ev isomorphe à K^n, or nous venons de voir que son dual est également isomorphe à K^n. □

2. Application bilinéaire

Lemme et définition. *Soient un ensemble Y, deux espaces vectoriels E et G et une application $f \in G^{E\times Y}$. Alors les 3 conditions suivantes sont équivalentes et se lisent "f est linéaire à gauche":*
1) $\hat{f} \in L(E, G^Y)$
2) $\operatorname{Im} \check{f} \subset L(E, G)$
3) $\forall y \in Y, \forall x, x' \in E, \forall a \in K,\ f(x + x', y) = f(x, y) + f(x', y)$ *et* $f(ax, y) = af(x, y)$.

Vérification immédiate. On en déduit aussi immédiatement l'équivalence des énoncés de la définition suivante:

Définition. *Soient trois espaces vectoriels E, F, G et f une application de $E \times F$ dans G. On dit que f est bilinéaire si les deux conditions équivalentes suivantes sont réalisées:*
• $\hat{f} \in L(E, L(F, G))$,
• $\check{f} \in L(F, L(E, G))$.
L'espace vectoriel des applications bilinéaires de $E \times F$ dans G sera noté $\mathrm{B}(E, F; G)$.

Exemple: la composition, de $L(E, F) \times L(F, G)$ dans $L(E, G)$ qui à (f, g) associe $g \circ f$, est bilinéaire.

Attention: $\mathrm{B}(E, F; G)$ n'a rien à voir avec $L(E \times F, G)$.

Propriété. *Les espaces vectoriels $\mathrm{B}(E, F; G)$, $L(E, L(F, G))$ et $L(F, L(E, G))$ sont canoniquement isomorphes, suivant la correspondance $f \leftrightarrow \hat{f} \leftrightarrow \check{f}$.*

3. Notion d'espaces en dualité

Définition. *Soient E, F deux K-ev. On appelle forme bilinéaire sur $E \times F$ toute application bilinéaire de $E \times F$ dans K. On note leur ensemble $\mathrm{B}(E, F) = \mathrm{B}(E, F; K)$.*

Définition. *Soient E, E' deux espaces vectoriels munis d'une forme bilinéaire $b \in \mathrm{B}(E, E')$. On dit que E sépare E' (resp. E' sépare E) si l'application $\check{b} \in L(E', E^*)$ (resp. $\hat{b} \in L(E, E'^*)$) est injective. Si ces deux conditions sont vérifiées on dit que E et E' sont en dualité par b.*

Remarques:

• La condition "E' sépare E" s'écrit également:

$$\forall x \in E, x \neq 0 \Rightarrow \exists u \in E', b(x, u) \neq 0.$$

• Pour tout K-ev E et tout sous-K-ev E' de E^*, on a la forme bilinéaire canonique $b \in \mathrm{B}(E, E')$ telle que $\check{b}$ est l'inclusion de E' dans E^*, autrement dit $b(x, u) = u(x)$. Alors automatiquement E sépare E'.

• Inversement, la condition d'injectivité de $\check{b} \in L(E', E^*)$ permet d'identifier E' à un sous-espace vectoriel de E^*. Ainsi, ayant fixé un K-ev E, la recherche d'espaces en dualité avec E se ramène à celle des sous-espaces vectoriels E' de E^* qui séparent E.

Théorème. *Tout espace vectoriel est séparé par son dual.*

Dans le cas général, ce résultat nécessite l'usage du théorème de Zorn. Cependant, nous pouvons le vérifier facilement dans le cas des K-ev ayant une base. Considérons ici la base comme fixée, donc l'espace identifié à $K^{(I)}$.

On notera $\langle y, x\rangle = \psi^{-1}(y)(x)$ la forme bilinéaire de la dualité naturelle entre $K^{(I)}$ et K^I, qui d'après la définition de ψ se caractérise par

$$\forall j \in I, \forall y = (y_i) \in K^I, \langle y, e_j\rangle = y_j.$$

Le théorème d'existence des applications linéaires associées nous donne son expression:

$$\forall x = (x_i) \in K^{(I)}, \forall y = (y_i) \in K^I, \langle y, x\rangle = \sum_{i\in I} x_i y_i$$

qui a un sens grâce au fait que (x_i) n'est non nul qu'en un nombre fini de termes.

On vérifie que $K^{(I)}$ est séparé par son dual K^I: pour tout $x \in K^{(I)}$ non nul il existe i tel que $x_i \neq 0$ donc $\langle e_i, x\rangle \neq 0$. $\square$

On peut aussi voir la conclusion comme conséquence des remarques suivantes (à prendre comme un exercice de raisonnement puisque la conclusion est déjà simplement acquise): Si on se restreint aux $y_i \in K^{(I)}$ alors on voit à la forme de l'expression ci-dessus que cette dualité est symétrique: $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$. Or tout K-ev sépare son dual par définition donc $K^{(I)}$ sépare K^I, donc il sépare aussi tout sous-K-ev de K^I, en particulier $K^{(I)}$. Puis, $K^{(I)}$ étant ainsi déjà séparé par le sous-K-ev $K^{(I)}$ de K^I, est a fortiori séparé par K^I.

Théorème. *Pour toute forme bilinéaire $b \in \mathrm{B}(E, F)$, les espaces quotients $E_1 = (E/(\mathrm{Ker}\,\hat{b}), \pi)$ et $F_1 = (F/(\mathrm{Ker}\,\check{b}), \pi')$ sont en dualité par la forme bilinéaire b' définie par $\forall x \in E, \forall y \in F$, $b(x, y) = b'(\pi(x), \pi'(y))$.*

Démonstration: On vérifie que b' est bien définie, du fait que pour tous $x, x' \in E, y, y' \in F$, $\hat{b}(x') = \hat{b}(x)$ et $\check{b}(y') = \check{b}(y)$ entraînent $b(x, y) = b(x', y) = b(x', y')$.

Puis on vérifie que E_1 sépare F_1 par

$$\forall y \in F, y \notin \mathrm{Ker}\,\check{b} \Rightarrow \exists x \in E, b(x, y) \neq 0$$

et de même F_1 sépare E_1. $\square$

Première notion d'orthogonalité

Définition. *Soit un sous-espace $F \subset E$ et j l'inclusion de F dans E. On appelle orthogonal de F le sous-espace vectoriel de E^**

$$F^\perp = \{u \in E^* | \forall x \in F, u(x) = 0\} = \mathrm{Ker}\,{}^t\!j$$

En effet, ${}^t\!j$ est l'application qui à toute forme linéaire sur E associe sa restriction à F. Donc $\mathrm{Ker}\,{}^t\!j$ est l'ensemble des formes linéaires sur E qui s'annulent identiquement sur F.

Théorème. *Soit $F \subset E$, et soit π la projection de E sur E/F. Alors ${}^t\pi$ est injective d'image $F^\perp$, autrement dit constitue un isomorphisme de $(E/F)^*$ sur $F^\perp$.*

Démonstration:

Comme π est surjective, ${}^t\pi$ est injective. Il reste à vérifier que $\mathrm{Im}\,{}^t\pi = F^\perp$.

D'une part, $\mathrm{Im}\,{}^t\pi \subset \mathrm{Ker}\,{}^t\!j = F^\perp$ résulte de ${}^t\!j \circ {}^t\pi = {}^t(\pi \circ j) = 0$.

D'autre part, $u \in F^\perp \Leftrightarrow F \subset \operatorname{Ker} u$ donc par le théorème de factorisation par les quotients, il existe $v \in L(E/F, K) = (E/F)^*$ tel que $u = v \circ \pi$, autrement dit $u = {}^t\pi(v)$. Donc $F^\perp \subset \operatorname{Im} {}^t\pi$, d'où l'égalité. $\square$

Théorème. *Si E et E' sont en dualité par b et si E est de dimension finie alors E' est de même dimension finie, et $\hat{b}$ et $\check{b}$ sont des isomorphismes respectivement de E sur ${E'}^*$ et de E' sur E^*.*

Démonstration: E étant de dimension finie, on sait que E^* l'est aussi et $\dim E^* = \dim E$.

Puis, l'application $\check{b}$ étant injective, définit un isomorphisme de E' sur un sous-espace vectoriel de E^*. Donc E' est de dimension finie et $\dim E' \leq \dim E$. Par le même raisonnement sur $\hat{b}$, on conclut $\dim E' = \dim E$. Enfin, $\hat{b}$ et $\check{b}$ étant linéaires injectives entre K-ev de même dimension finie, ce sont des isomorphismes. $\square$

Remarque: nous avons vu plus haut un cas d'espaces vectoriels de dimension infinie en dualité par un b tel que ni $\hat{b}$ ni $\check{b}$ n'est un isomorphisme: la dualité entre $K^{(I)}$ et lui-même. On peut déduire de Zorn qu'en dimension infinie, si $\check{b}$ est un isomorphisme alors $\hat{b}$ ne n'est pas. Plus précisément, Zorn implique d'abord l'existence de bases, ce qui ramène $\check{b}$ à l'isomorphisme de K^I sur $(K^{(I)})^*$. Alors, Zorn implique l'existence de bien d'autres formes linéaires sur K^I que celles issues de $K^{(I)}$. En effet, toute forme linéaire sur son sous-espace $K^{(I)}$, donc non seulement celles de la dualité entre $K^{(I)}$ et lui-même mais n'importe quel élément de son dual K^I, se prolonge en forme linéaire sur K^I (par exemple à l'aide d'une projection de K^I sur $K^{(I)}$ parallèlement à un supplémentaire). Et ce, de façon non unique, puisqu'à partir d'une solution on peut lui ajouter toute forme linéaire sur K^I s'annulant sur $K^{(I)}$ pour obtenir une autre solution, en se souvenant que, toujours par Zorn, il en existe de non nulles puisque l'espace vectoriel de dimension infinie $K^I/K^{(I)}$ est séparé par son dual.

Cependant, le bon sens vient protester contre ces constructions invraisemblables: lorsqu'une forme linéaire f définie sur $K^{(I)}$ s'écrit à l'aide d'une certaine famille $(a_i) \in K^I$:

$$f : (x_i) \in K^{(I)} \mapsto \sum_i a_i x_i,$$

il n'est pas raisonnable d'étendre f à des éléments $x = (x_i) \in K^I$ hors de $K^{(I)}$ pour y prendre des valeurs arbitraires n'ayant rien à voir avec la somme de la série

$$\sum_i a_i x_i$$

lorsque celle-ci converge. (Notons que cette question de convergence est permise du fait de la topologie de $\mathbb{R}$, tandis que rien de ce que nous allons évoquer ne serait possible avec $K = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ par exemple).

Notamment, si on veut sortir du pur jeu algébrique et s'intéresser par exemple aux utilisations effectives des espaces vectoriels de dimension infinie en physique, il est inévitable de s'en remettre ainsi au bon sens et d'accepter les opérations avec des vecteurs et formes linéaires ayant une infinité de composantes non nulles dans une base donnée, avec un ensemble I dénombrable, et où la dualité entre deux éléments s'exprime comme somme de la série ci-dessus avec une infinité de termes non nuls. Cela est effectivement raisonnable dans la mesure où les autres objets qui ne respecteraient pas ces conditions, sont le plus souvent impossibles à construire effectivement, autrement dit ont fondamentalement besoin de Zorn pour exister. On choisit alors de rejeter ces objets pathologiques, qualifiés de "monstres mathématiques", comme s'ils n'existaient pas. Ceci peut s'interpréter soit métamathématiquement comme un refus de l'axiome du choix, soit plus modestement comme une décision de ne pas s'intéresser à tout l'espace dual E^* d'un espace vectoriel E donné mais seulement à un de ses sous-espaces $E' \subset E^*$ séparants, autrement dit, de ne pas s'intéresser à la notion de dual que nous avons définie d'abord, mais à la notion d'espaces en dualité que nous avons vue ensuite, et dans un contexte tel qu'en pratique, aucune forme linéaire sur E étrangère à E' ne pointera le bout du nez.

Dans ce contexte d'un couple (E, E') d'espaces en dualité, le choix d'une base sera joué par des isomorphismes φ et φ' de sous-espaces vectoriels F et F' de K^I contenant $K^{(I)}$ sur les espaces vectoriels E et E' respectivement.

Alors, une question importante est de savoir si la série des produits qui sert à définir à travers une telle "base" la dualité entre E et E' converge effectivement. Remarquons que cette question de la convergence ou non des séries s'exprime également, mais comme une nouvelle notion, concernant la série définissant un vecteur x de E à partir de ses coordonnées $(a_i) \in F$ dans la famille des $x_i = \varphi(e_i)$ appelée *base topologique*:

$$x = \varphi((a_i)) = \sum_i a_i x_i.$$

En effet, une telle série est convergente dans la mesure où les formes linéaires qu'on se permet d'appliquer sur E transforment cette série en une série convergente dans $\mathbb{R}$.

Plus précisément, F sera souvent égal à l'ensemble des familles de composantes pour lesquelles la série obtenue par dualité avec tout élément de F' converge, et de même en échangeant F et F'. Suivant cette approche, plus un espace vectoriel rétrécit tout en restant séparant, plus son dual grossit, en sorte que $\hat{b}$ et $\check{b}$ puissent encore être simultanément des isomorphismes, même si ce n'est pas toujours le cas.

Nous venons d'évoquer la somme sur une base topologique comme une manière possible de construire une dualité. Ce n'est pas la seule : il y a d'autres constructions, en particulier par la théorie de l'intégration et ses variantes, menant à des considérations semblables à ci-dessus avec d'autres problèmes de convergence.

De par ces questions cruciales de convergence qu'elle porte, l'étude des espaces vectoriels de dimension infinie sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et de leurs dualités relève du domaine de l'Analyse.

Moralité de cette histoire

Nous avons introduit deux notions de dualité: la notion de dual d'un espace vectoriel d'une part, la notion d'espaces vectoriels en dualité d'autre part. Nous avons vu des relations entre ces deux notions, mais la situation est différente suivant qu'on soit en dimension finie ou infinie.

• En dimension finie, ces deux notions sont clairement équivalentes, et on n'a pas besoin d'utiliser le théorème de Zorn ou l'axiome du choix car tout ce qui existe peut s'expliciter (avec des paramètres). Le dual E^* d'un K-ev E de dimenion finie n'est pas un objet mystérieux car toute forme linéaire est exprimable numériquement à l'aide d'une base; il est en dualité avec E. Inversement, tout espace vectoriel E' en dualité avec E est canoniquement isomorphe à E^*, ce qui permet en pratique de confondre E' et E^*; et de même, en retournant la relation de dualité, on remarque que E est canoniquement isomorphe au dual E'^* de E', ce qui nous épargnera la peine d'introduire E'^* comme un nouvel objet: on le confondra avec E, utilisant les vecteurs de E en guise de formes linéaires sur E'.

En fait, ce qui importe en mathématiques ce n'est pas ce que les objets "sont" mais quel rôle ils jouent. Il n'y a pas de différence de nature entre les vecteurs et les formes linéaires, seulement une éventuelle différence de rôle dans un contexte donné: on appelle de préférence vecteurs les éléments d'un espace vectoriel auquel on choisit de s'intéresser pour lui-même, tandis qu'on appelle formes linéaires des éléments vus pour leur rôle sur un espace vectoriel en dualité avec eux.

Il y aussi une différence dans la manière de se les représenter visuellement: les vecteurs sont "vus" sous forme de points, or deux points sur un même dessin doivent représenter des éléments du même espace vectoriel. Il n'y a cependant aucune obligation de principe à représenter sous forme de points uniquement les éléments d'un seul de deux espaces en dualité. Seulement, pour faire de même avec l'autre il faut faire un autre dessin. A moins qu'il existe un moyen d'identifier l'espace à son dual, ce qui est le cas des espaces euclidiens que nous verrons ultérieurement.

• En dimension infinie, la situation est plus compliquée, et dépend de plus de la théorie des ensembles que l'on a choisi d'adopter: suivant qu'on accepte ou non l'axiome du choix, on peut arriver à des conclusions différentes. Nous allons présenter différents aspects de la comparaison entre nos deux notions, montrant (à mon avis, mais chacun peut se faire son opinion) que la notion d'espaces en dualité porte finalement plus de sens que la notion de dual.

Accepter l'axiome du choix a notamment deux avantages pour le mathématicien. Le premier est philosophique: dans sa formulation il semble en concordance avec la "réalité mathématique" du "vrai ensemble de toutes les formes linéaires" sur un espace vectoriel donné. Le deuxième est qu'il est simple et permet de déterminer les réponses à un grand nombre de questions. Son inconvénient est que les réponses qu'on en tire ne sont pas celles de la "réalité physique", qui intéressent les applications physiques de ces notions et l'Analyse. On connaît les réponses, mais ces réponses concernent des objets qu'on ne peut pas connaître explicitement, des "monstres" qui ne nous intéressent pas.

Signalons aussi que de toute manière il ne permet pas de répondre à toutes les questions non plus, car toute théorie des ensembles, avec ou sans axiome du choix, comporte des énoncés indécidables; ainsi, même s'il détecte l'existence de monstres, il ne délimite pas leur ensemble exact et complet pour autant. En fait, prétendre parler de l'ensemble de *toutes* les parties d'un ensemble infini donné, ou en l'occurence, définir le dual comme étant l'ensemble de *toutes* les formes linéaires sur un espace vectoriel donné, n'est qu'une illusion: sa signification dépend de l'univers de la théorie des ensembles dans lequel on se place, à savoir que cela représente l'ensemble de tous les objets trouvables dans cet univers qui ont la propriété requise.

Alors, quelque part, parler non *du* dual mais d'*un* dual d'un espace vectoriel apparaît comme une option plus sage et modeste, à savoir qu'on renonce à la prétention illusoire d'invoquer l'ensemble de *toutes* les formes linéaires sur un espace vectoriel E donné sous prétexte qu'on le note E^*. En parlant d'un dual, on sait ce qu'on fait, à savoir qu'on en prend un arbitrairement; en parlant du dual, on fait au fond la même chose, sauf qu'on n'en est pas conscient. La seule différence réelle pratique entre ces deux langages, c'est qu'une fois posé un dual ou le dual, lorsqu'ensuite on rencontre une forme linéaire, son appartenance à ce dual est une question qui se pose dans le premier cas, tandis qu'elle est postulée dans le deuxième. Or les monstres issus de l'axiome du choix ne se définissent pas ni ne se rencontrent en physique, donc il semble raisonnable de dire qu'on ne les rencontrera pas, ce qui semble autoriser à définir "le dual" comme étant l'ensemble des formes linéaires non monstrueuses, sans entraîner de contradictions.

On peut donc trouver plus raisonnable suivant les besoins d'adopter l'orientation métamathématique inverse, pour se débarrasser des monstres. Il y a seulement un petit problème: s'abstenir simplement d'utiliser l'axiome du choix signifie s'empêcher de répondre aux questions qu'il tranchait, et donc ne pas savoir à quoi ressemble le dual de tel ou tel espace vectoriel. Car, une conséquence de l'axiome du choix peut-elle en son absence devenir fausse, ou seulement vraie mais trop difficile (ou impossible) à démontrer ? Rigoureusement, on ne peut pas dire qu'un énoncé devient "faux sans l'axiome du choix", car ne pas utiliser l'axiome du choix n'implique pas a priori qu'il soit faux, et donc de même ses conséquences auraient encore une chance d'être vraies. Pour arriver à des conclusions contraires, il est nécessaire de partir d'un axiome contraire, encore faut-il préciser lequel et avoir la preuve qu'en procédant ainsi on n'a pas introduit de contradictions dans la théorie. Or, il se trouve qu'un tel travail a été accompli par les logiciens. Seulement, les possibles axiomes contraires, les raisonnements qui les utilisent, mais surtout la démonstration de leur cohérence, sont hors de portée du présent cours. C'est à leur existence quelque part dans les hautes sphères de la logique qu'on fera allusion en mentionnant "ce qui est possible sans l'axiome du choix".

Les questions de l'équivalence ou de la non-équivalence entre les deux notions de dualité sont les suivantes:

1) Un espace vectoriel est-il séparé par son dual ? Dans ce cas, le dual est un cas particulier de dualité, donc ce qu'on fera avec la dualité en général sera également valable pour le dual. Que

perd-on donc à éliminer de l'étude les espaces vectoriels non séparés par leurs duaux ? On ne perd rien dans le cadre de la théorie des ensembles avec axiome du choix, donc à la limite "le dual dans l'univers étendu par l'axiome du choix" (bien que cette formule ne soit pas rigoureusement exacte) permet de tout englober dans la notion de dualité. Ceci dit, éliminer de l'étude les espaces vectoriels non séparés par leurs duaux quand il en existe, à savoir en l'absence de l'axiome du choix, n'est pas une grosse perte, car déjà, une certaine intuition physique peut les rejeter comme des monstres à eux tout seuls quand bien même on peut les définir simplement et explicitement. Rappelons les exemples déjà évoqués, dont le dual peut même être réduit à zéro: $\mathbb{R}$ vu comme $\mathbb{Q}$-espace vectoriel de dimension infinie, ainsi que l'espace quotient $K^I/K^{(I)}$ pour I infini.

2) Y a-t-il des propriétés spécifiques au dual qui ne sont pas valables dans le cas général d'un espace en dualité ? L'isomorphisme entre l'orthogonal et le dual du quotient en est un exemple. Comme de nécessité, ceci se base sur "si on rencontre une forme linéaire quelque part, alors elle appartient au dual".

3) Etant donnée une dualité b entre E et E', les applications linéaires $\hat{b}$ et $\check{b}$ sont injectives par définition, donc on peut assimiler E à un ensemble de formes linéaires sur E' et inversement. Mais quand sont-elles des isomorphismes, en sorte de pouvoir confondre chacun de E, E' avec le dual de l'autre ?

On a vu qu'elles peuvent parfaitement ne l'être ni l'une ni l'autre, auquel cas la notion de dualité est strictement plus générale. Mais si l'une l'est, l'autre l'est-elle ? D'après l'axiome du choix, jamais. Sinon, c'est possible, et cela peut même être le cas le plus fréquent. En ce cas, toutes les informations sur la notion de dual à partir d'un tel espace se trouvent contenues dans sa dualité avec son dual. Sinon, on risque de "perdre quelque chose" en ignorant les formes linéaires sur E^* qui ne seraient pas données par les éléments de E. Alors, ce risque existe-t-il en sorte que la bidualité (le dual du dual) échappe à notre étude ?

Il se trouve que, même dans un cadre contraire à l'axiome du choix, il y a des contre-exemples. Voici un exemple en contradiction avec l'axiome du choix, ignorant les formes linéaires monstrueuses qu'il engendre: si E est l'ensemble des suites convergentes, alors, E serait encore strictement inclus dans son bidual E^{**}, ensemble des applications bornées de $\overline{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ dans $\mathbb{R}$, où l'injection canonique se définit en prolongeant toute suite (u_n) en $u_\infty = \lim_{n\to+\infty} u_n$. (Ici, E^* est l'ensemble des applications définies sur $\overline{\mathbb{N}}$ dont la série des valeurs absolues converge).

Cependant, il suffit simplement dans ce cas de partir non de la dualité entre E et E^* mais de celle entre E^{**} et E^*, où donc E est vu comme sous-espace vectoriel séparant et non plus comme espace premier, pour être à nouveau dans une situation de double bijectivité de $\hat{b}$ et $\check{b}$.

En conclusion, on pourra encore éventuellement opposer les notions de vecteurs et de formes linéaires en prévision du cas où l'on s'appuierait sur la bijectivité de $\check{b}$ et non sur celle de $\hat{b}$.

[Théorème oublié précédemment:]

Soit une forme bilinéaire b entre E et F. Si $\hat{b}$ est de rang fini, alors $\check{b}$ est de même rang.

Ceci résulte des théorèmes précédents: $\operatorname{Im}\hat{b}$ est isomorphe à $E/\operatorname{Ker}\hat{b}$ donc de même dimension, lequel est en dualité avec $F/\operatorname{Ker}\check{b}$, et on utilise le résultat sur la dualité en dimension finie.

Deuxième notion d'orthogonal

Dans ce qui suit, on fixe (E, E') un couple d'espaces en dualité, par une forme bilinéaire notée $b = \langle , \rangle$ et appelée le crochet de dualité.

On dira que les éléments $x \in E$ et $y \in E'$ sont *orthogonaux* ou encore que l'un est orthogonal à l'autre, si $\langle x, y\rangle = 0$.

Définition. *Soit $A \subset E$ une partie quelconque. On appelle orthogonal de A dans E', l'ensemble*

$$A^\perp_{E'} = \{y \in E' | \forall x \in A, \langle x, y\rangle = 0\}.$$

Si le contexte permet de sous-entendre E', on l'appelera simplement l'orthogonal de A et on le notera $A^\perp$.

Cette notion se raccroche à ce qui concerne le dual, de deux manières.

D'abord, du point de vue où $E' \subset E^*$, on a simplement $A^{\perp}_{E'} = A^{\perp} \cap E'$. C'est donc un sous-espace vectoriel de E'. On peut aussi exprimer cette notion en notant j l'inclusion de A dans E et donc ${}^t j : E^* \to K^A$ restriction des fonctions à la partie A, par $A^{\perp}_{E'} = \mathrm{Ker}({}^t j \circ \check{b})$ (on voit ici $\check{b}$ dans son rôle d'inclusion de E' dans E^*).

Ensuite, du point de vue où $E \subset E'^*$, remarquons que cette notion ne dépend pas de E mais seulement de E' et de la restriction du crochet de dualité à $A \times E$, donc de A vu directement comme ensemble de formes linéaires sur E' (partie de E'^*). Ainsi, elle coïncide avec la notion d'orthogonal inverse de celle qu'on avait introduite: on avait défini l'othogonal d'un ensemble de vecteurs comme étant l'ensemble des formes linéaires orhogonales à tous ces vecteurs. Maintenant c'est l'ensemble des vecteurs orthogonaux à un ensemble donné de formes linéaires.

Dans la suite, nous restreindrons de façon sous-entendue la notion d'orthogonal d'une partie de l'un des espaces E, E' à l'autre, et on notera simplement $A^{\perp}$ pour désigner $A^{\perp}_{E'}$ ou $A^{\perp}_{E}$ suivant le cas.

Théorème. *Le sous-K-ev de E engendré par A a le même orthogonal que A:* $(\mathrm{Vect}\, A)^{\perp} = A^{\perp}$.

En effet, $A^{\perp} = \{y \in E' | A \subset \mathrm{Ker}(\check{b}(y))\}$, or $\mathrm{Ker}(\check{b}(y))$ est un sous-espace vectoriel donc $A \subset \mathrm{Ker}(\check{b}(y)) \Leftrightarrow \mathrm{Vect}\, A \subset \mathrm{Ker}(\check{b}(y))$. □

Théorème. *Pour tous sous-espaces vectoriels A et B de E,* $(A + B)^{\perp} = A^{\perp} \cap B^{\perp}$.

En effet, $(A+B)^{\perp} = (\mathrm{Vect}(A \cup B))^{\perp} = (A \cup B)^{\perp} = A^{\perp} \cap B^{\perp}$ vue la définition de l'orthogonal. □

Théorème. *Pour toutes parties A et B de E,*
$A \subset (A^{\perp})^{\perp}$
$A \subset B \Rightarrow B^{\perp} \subset A^{\perp}$

Vérification immédiate à partir des définitions. □

Théorème. $((A^{\perp})^{\perp})^{\perp} = A^{\perp}$.

Cela découle du théorème précédent, d'un côté en appliquant la première formule à $A^{\perp}$, de l'autre en voyant la conséquence que la deuxième tire de la première. □

Au lieu de l'isomorphisme entre l'orthogonal et le dual du quotient (qui demeure valable seulement en dimension finie), on aura maintenant

Théorème. *Soit A sous-espace vectoriel de E, alors A est canoniquement en dualité avec $E'/A^{\perp}$.*

Soit la forme bilinéaire b' restriction de b à $A \times E'$, autrement dit telle que $\hat{b}' = \hat{b} \circ j$, ce qui équivaut à $\check{b}' = {}^t j \circ \check{b}$.

On applique alors à la forme bilinéaire b' le théorème de dualité entre quotients. En effet, E' sépare A puisque $A \subset E$ et E' sépare E par hypothèse de dualité; d'autre part, on a écrit $A^{\perp}_{E'} = \mathrm{Ker}({}^t j \circ \check{b})$, donc $A^{\perp}_{E'} = \mathrm{Ker}\, \check{b}'$. □

Théorème. *Si F est un sous-espace vectoriel de dimension finie alors $(F^{\perp})^{\perp} = F$.*

En effet, on a vu plus haut que F et $(F^{\perp})^{\perp}$ ont le même orthogonal. Par le théorème ci-dessus on en déduit qu'ils sont en dualité avec un même espace vectoriel. Pour fixer les idées, on peut rappeler que $F \subset (F^{\perp})^{\perp}$ et remarquer qu'en ce sens la première dualité est la restriction de la deuxième.

Il suffit alors d'appliquer le théorème des espaces en dualité de dimension finie pour conclure. □

Contre-exemple pour F de dimension infinie: soit I infini, $E = K^I$, $F = K^{(I)}$, $E' = K^{(I)}$, alors $F^{\perp} = 0$ et $(F^{\perp})^{\perp} = K^I$.

Corollaire. *Si E est de dimension finie, l'orthogonal constitue une bijection de l'ensemble des sous-espaces vectoriel de E sur l'ensemble des sous-espaces vectoriels de E'.*