Sylvain Poirier
http://spoirier.lautre.net/

Fondements des mathématiques

4. Langages et théories

Cette partie vise à introduire les notions de base de deux théories cruciales au fondement des mathématiques, et qui ont beaucoup en commun: l'algèbre universelle et la théorie des modèles. En plus du fait que ces théories sont généralement méconnues du cursus standard, l'approche qui sera suivie présente plusieurs orginalités. Notamment, on les présentera sous leur version multi-sortes, ouvrant la voie à une approche dynamique de la théorie des modèles par la construction de sortes supplémentaires. Aussi, les notions seront introduites de manière formalisée dans le cadre de la théorie des ensembles telle que développée dans les textes précédents, dont les notions d'ensembles finis et d'induction bien-fondée qui suffiront à remplacer l'usage traditionnel des nombres entiers et/ou des chaînes de symboles (lesquels seront définis plus tard comme fruit de ces théories et non à leur fondement). Enfin, n'ayant pas encore postulé l'axiome de l'infini, qui s'énonce "il existe un ensemble infini", nous allons déjà voir tout ce qu'on peut faire indépendamment de celui-ci.

4.1. Les sortes

Soit X un ensemble non vide qu'on supposera fixé (sauf mention contraire), dont les éléments sont appelés les sortes.

Définition. *On appelle ensemble classifié ou τ-ensemble un ensemble E muni d'une application notée τ de E dans X, appelée sa signature. Toute partie d'un ensemble classifié est classifié par la restriction de τ. Ainsi E est partitionné en les $E'_c = \{x \in E | \tau(x) = c\}$. On notera $E|_c$ l'ensemble non-classifié sous-jacent à E'_c, i.e. E'_c est $E|_c$ muni de la signature constante $E|_c \ni x \mapsto c$.*

En pratique, on regardera un ensemble classifié non comme un couple (E, τ) mais comme assimilé à l'ensemble E, car on n'utilisera jamais d'autre application notée τ sur un même ensemble, tandis que le même symbole τ d'application pourra être utilisé dans d'autres ensembles. Ainsi τ sera utilisé non comme application sur un ensemble, mais comme opérateur sur une classe englobant tous les ensembles classifiés. Ce qui, vu ainsi, ressemble à un abus de langage, peut se reformuler comme une opération formellement rigoureuse, de la manière suivante.

Redéfinition. *On appelle τ-ensemble un ensemble de couples (c, x) où $c \in X$, et on note τ la première projection $(c, x) \mapsto c$, i.e. $\tau(y) = y(0)$. Ainsi $E = \coprod_{c \in X} E|_c$ où $E|_c$ est l'ensemble non-classifié sous-jacent à E'_c, i.e. $E'_c = \{c\} \times E|_c$.*

Mais en dehors de cette bijection d'oubli de E'_c à une seule sorte sur $E|_c$ non-classifié, la deuxième projection ne sera pas utilisée en pratique. En particulier, on ne s'intéressera pas à savoir si les $E|_c$ sont ou non disjoints, mais on les traitera comme tels puisqu'on ne les regardera que par leur image E'_c.

Cette notion d'ensemble classifié peut être vue comme généralisation de la notion d'ensemble. Cette dernière en est en effet le cas particulier où X est un singleton (et où donc τ se réduit à une constante universelle). De cette manière, introduisons quelques constructions sur les ensembles classifiés, semblables à celles que nous avions vues sur les ensembles et qui coïncident avec elles si X est un singleton.

On appellera *τ-application* d'un τ-ensemble E dans un τ-ensemble F toute application f de E dans F telle que dans E, $\tau \circ f = \tau$.

Toute composée de τ-applications est une τ-application; pour tout τ-ensemble E, Id_E est une τ-application; l'inverse d'une τ-application injective est également une τ-application.

L'ensemble des τ-applications de E dans F sera noté F^E_τ. Ce n'est pas un τ-ensemble. On a

$$F^E_\tau \simeq \prod_{x \in E} F|_{\tau(x)} \simeq \prod_{c \in X} (F|_c)^{E|_c}.$$

Si on voulait généraliser la notion de puissance ci-dessus à une notion de produit d'une famille classifiée d'ensembles classifiés $(E_i)_{i \in I}$, cela donnerait l'expression $\prod_{i \in I}(E_i|_{\tau(i)})$. Cependant, nous utiliserons en pratique une autre manière de généraliser la notion de produit:

On appellera *τ-produit* d'une famille $(E_i)_{i\in I}$ de τ-ensembles, où I n'est pas classifié, le τ-ensemble qu'on notera ici P, défini par

$$\forall c \in X, (\hat{\prod_{i\in I}} E_i)|_c = \prod_{i\in I}(E_i|_c).$$

En particulier, $\hat{\prod}_{i\in\emptyset} E_i \simeq X$, et si $I \neq \emptyset$ alors il a une injection canonique vers le produit classique (d'image l'ensemble des $(x_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} E_i$ tels que $i \mapsto \tau(x_i)$ est constante).

$\forall i \in I$, on a la projection canonique $\pi_i \in (E_i)^P_\tau$, qui coïncide sur chaque sorte avec sa version classique. Pour tout τ-ensemble A, on a une bijection canonique

$$(\hat{\prod_{i\in I}} E_i)^A_\tau \simeq \prod_{i\in I}(E_i)^A_\tau$$

qui à tout $f \in P^A_\tau$ associe la famille des $f_i = \pi_i \circ f \in (E_i)^A_\tau$. La bijection inverse sera notée

$$f = \hat{\prod_{i\in I}} f_i.$$

Le τ-produit de deux τ-ensembles E et F sera noté $E \times_\tau F$. Ainsi, pour tous $f \in E^A_\tau, g \in F^A_\tau$, on a $f \times_\tau g \in (E \times_\tau F)^A_\tau$. On a

$$\forall f \in F^E, f \in F^E_\tau \Leftrightarrow \mathrm{Gr}(f) \subset \{(x,y) \in E \times F | \tau(x) = \tau(y)\} \simeq E \times_\tau F$$
$$\forall f \in F^E_\tau, \mathrm{Gr}_\tau(f) = \mathrm{Im}(\mathrm{Id}_E \times_\tau f) \subset E \times_\tau F.$$

(Par abus de notation on notera parfois Gr au lieu de Gr_τ.) Puis, étant donnés un τ-ensemble I et une famille d'ensembles ordinaires $(E_i)_{i\in I}$, la bijection canonique

$$\coprod_{i\in I} E_i \simeq \coprod_{c\in X} \coprod_{i\in I|_c} E_i.$$

permet de voir $\coprod_{i\in I} E_i$ comme τ-ensemble en définissant $\tau((i,x)) = \tau(i)$. C'est ainsi que, par abus de langage, nous le verrons. Enfin, étant donnés un ensemble I et une famille de τ-ensembles $(E_i)_{i\in I}$, sa somme $F = \coprod_{i\in I} E_i$ sera vue comme τ-ensemble par $\tau(i,x) = \tau(x)$ de sorte que les injections canoniques $j_i = (x \mapsto (i,x))$ soient des τ-applications: $\forall i \in I, j_i \in F^{E_i}_\tau$.

4.2. Langages

On appellera *langage relationnel* (resp. *langage algébrique*) un ensemble (resp. un τ-ensemble) L dont les éléments seront appelés *symboles de relations*, resp. *symboles d'opérations*, muni d'une famille indexée par L de τ-ensembles finis: à tout élément s de L est associé un τ-ensemble fini noté V_s, et appelé son *arité*, ou encore son *ensemble de variables*.

On peut voir l'arité comme étant une autre forme de sorte, puisque là encore, elle est attribuée définitivement au symbole. Mais nous n'aurons pas à utiliser autour de cela des constructions comme ci-dessus, puisqu'on ne s'intéressera le plus souvent qu'à un langage fixe, et non à des opérations entre langages. Les symboles d'opérations d'arité vide sont appelés des symboles de constantes. Les symboles d'opérations dont l'arité est un singleton sont appelés des symboles d'application.

Enfin, on appellera *langage mixte* un langage pouvant contenir aussi bien des symboles de relations que des symboles d'opérations. C'est donc l'union d'un langage relationnel et d'un langage algébrique (supposés disjoints).

Pour tout langage L, notons $\mathcal{O}_L$ la classe des couples (s,u) tels que $s \in L$ et u est une τ-application de domaine V_s. Pour tout $x = (s,u)$ dans $\mathcal{O}_L$ on notera $\mathrm{Im}'(x) = \mathrm{Im}\, u$. On définit ensuite pour tout τ-ensemble E

$$\Omega_L(E) = \coprod_{s\in L} E^{V_s}_\tau$$
$$\forall x, x \in \Omega_L(E) \Leftrightarrow (x \in \mathcal{O}_L \text{ et } \mathrm{Im}'(x) \subset E).$$

Si $x = (s,u)$ et s est un symbole algébrique on pose par définition $\tau(x) = \tau(s)$.

L'application $\mathrm{Im}'_E = \mathrm{Im}'_{|\Omega_L(E)} \in \mathcal{P}(E)^{\Omega_L(E)}$ définit

$$(\rho_E, \Omega_{L|\mathcal{P}(E)}) \in \mathrm{Gal}^+(\mathcal{P}(\Omega_L(E)), \mathcal{P}(E)) \text{ où } \rho_E(A) = \bigcup_{x\in A} \mathrm{Im}'(x).$$

On a $E \subset F \Rightarrow \Omega_L(E) \subset \Omega_L(F)$; et pour toute famille non vide $(E_i)_{i\in I}$ de τ-ensembles,

$$\Omega_L\left(\bigcap_i E_i\right) = \bigcap_i \Omega_L(E_i).$$

Notation. *Pour tous τ-ensembles E, F et tout $f \in F^E_\tau$, on définit l'application f_L de $\Omega_L(E)$ vers $\Omega_L(F)$ par $(s,u) \mapsto (s, f\circ u)$).*

Remarquons que, dans le cas d'un langage algébrique, f_L est nécessairement une τ-application. En effet, $\forall (s,u) \in \Omega_L(E), \tau(s,u) = \tau(s) = \tau(s, f\circ u) = \tau(f_L(s,u))$.

Proposition. *Pour tous τ-ensembles E, F et tout $f \in F^E_\tau$, on a*
1) Si f est injective alors f_L aussi
2) Si f est surjective alors f_L aussi; autrement dit en général, $\mathrm{Im}(f_L) = \Omega_L(\mathrm{Im}\, f)$.
3) $\forall B \subset F, {f_L}^*(\Omega_L(B)) = \Omega_L(f^*(B))$.
4) $\forall A \subset E, f_L[\Omega_L(A)] = \Omega_L(f[A])$.
5) $(\mathrm{Id}_E)_L = \mathrm{Id}_{\Omega_L(E)}$
6) si f est bijective et $g = f^{-1}$, alors $g_L = (f_L)^{-1}$.
7) Entre trois τ-ensembles quelconques, si $h = g\circ f$ alors $h_L = g_L \circ f_L$.

Preuves:

1) $f_L(s,u) = f_L(s',u') \Leftrightarrow (s, f\circ u) = (s', f\circ u') \Leftrightarrow (s = s'$ et $f\circ u = f \circ u')$. Or, si f est injective alors $f\circ u = f\circ u' \Rightarrow u = u'$. On peut aussi le voir en disant que la bijection f de E sur $\mathrm{Im}\, f$ induit une bijection de $\Omega_L(E)$ sur $\Omega_L(\mathrm{Im}\, f) \subset \Omega_L(F)$.

2) $\forall (s,v) \in \Omega_L(\mathrm{Im}\, f), \forall a \in V_s, \exists x \in E, f(x) = v(a)$. Par choix fini, $\exists u \in E^{V_s}, f\circ u = v$. De plus, $u \in E^{V_s}_\tau$ car $\tau\circ u = \tau \circ f\circ u = \tau\circ v = \tau$ donc $(s,u) \in \Omega_L(E)$ et $f_L(s,u) = (s,v)$.

3) $\mathrm{Im}'_F \circ f_L$ définit $(\rho_F \circ f_{L[]}, {f_L}^* \circ \Omega_{L|\mathcal{P}(F)}) \in \mathrm{Gal}^+(\mathcal{P}(\Omega_L(E)), \mathcal{P}(F))$.

$f_{[]} \circ \mathrm{Im}'_E$ définit $(f_{[]} \circ \rho_E, \Omega_L \circ f^*) \in \mathrm{Gal}^+(\mathcal{P}(\Omega_L(E)), \mathcal{P}(F))$.

Or $\forall (s,u) \in \Omega_L(E)$, $f[\mathrm{Im}\, u] = \mathrm{Im}(f\circ u)$ donc ${f_L}^* \circ \Omega_{L|\mathcal{P}(F)} = \Omega_L \circ f^*$.

4) vient de 2) appliqué à la restriction de f à A.

5) et 7) sont immédiats; il en résulte 6). □

4.3. Systèmes relationnels et morphismes

Fixons dans cette partie un langage relationnel L.

Définition. *On appellera L-système tout couple $\mathbf{E} = (E,K)$ où E est un τ-ensemble et $K \subset \Omega_L(E)$. L'ensemble K sera appelé une L-structure. Il est de la forme $K = \coprod_{s\in L} K_s$ où $K_s \subset E^{V_s}_\tau$ est appelé l'interprétation de s dans $\mathbf{E}$.*

Définition. *Etant donnés deux L-systèmes $\mathbf{E} = (E,K)$ et $\mathbf{F} = (F,K')$, on appelle L-morphisme (ou simplement: morphisme) de $\mathbf{E}$ dans $\mathbf{F}$, toute τ-application f de E dans F telle que $f_L[K] \subset K'$, autrement dit $K \subset {f_L}^*(K')$. On notera $\mathrm{Mor}(\mathbf{E},\mathbf{F})$ l'ensemble des L-morphismes de $\mathbf{E}$ dans $\mathbf{F}$. On dira de plus que f est un isomorphisme de $\mathbf{E}$ sur $\mathbf{F}$ ssi f est bijective et $f_L[K] = K'$, autrement dit f est bijective, $f \in \mathrm{Mor}(\mathbf{E},\mathbf{F})$ et $f^{-1} \in \mathrm{Mor}(\mathbf{F},\mathbf{E})$. Enfin, on appelle* automorphisme *d'un système $\mathbf{E}$, tout isomorphisme de $\mathbf{E}$ sur lui-même.*

Pour tout L-système (E,K), Id_E est un automorphisme de (E,K). Tout composé de deux morphismes entre trois systèmes est un morphisme. Tout composé de deux isomorphismes est un isomorphisme. L'inverse d'un isomorphisme est un isomorphisme.

Deux L-systèmes sont dits *isomorphes* s'il existe un L-isomorphisme de l'un sur l'autre. C'est une relation d'équivalence sur la classe des L-systèmes.

Proposition. *Soient F un τ-ensemble, et $(\mathbf{E}_i)_{i\in I}$ une famille de L-systèmes $\mathbf{E}_i = (E_i, K_i)$, chacun muni d'une τ-application f_i de F vers E_i. Alors l'ensemble $K = \bigcap_{i\in I} {f_i}_L^*(K_i)$ est l'unique partie de $\Omega_L(F)$ telle que, notant $\mathbf{F} = (F,K)$:*

$$\forall i \in I, f_i \in \mathrm{Mor}(\mathbf{F}, \mathbf{E}_i)$$

Pour tout L-système $\mathbf{G} = (G,K'), \forall g \in F^G_\tau, g \in \mathrm{Mor}(\mathbf{G},\mathbf{F}) \Leftrightarrow \forall i \in I, f_i\circ g \in \mathrm{Mor}(\mathbf{G},\mathbf{E}_i)$

Preuve. Notons $K_0 = \bigcap_{i\in I} {f_i}_L{}^*(K_i)$. La première condition équivaut à $K \subset K_0$. Puis, on a

$$(\forall i \in I, f_i \circ g \in \mathrm{Mor}(\mathbf{G}, \mathbf{E}_i)) \Leftrightarrow (\forall i \in I, g_L[K'] \subset {f_i}_L{}^*(K_i)) \Leftrightarrow g_L[K'] \subset K_0$$

ce qui simplifie la deuxième condition en $(g_L[K'] \subset K \Leftrightarrow g_L[K'] \subset K_0)$.

Il apparaît déjà que ces conditions sont satisfaites lorsque $K = K_0$.

Pour montrer qu'il n'y a pas d'autres solutions, prenons $G = F$ et $g = \mathrm{Id}_F$. La condition s'écrit alors $\forall K' \subset \Omega_L(F), K' \subset K \Leftrightarrow K' \subset K_0$, donc $K = K_0$. □

Plongements. *Soient* $\mathbf{E} = (E, K), \mathbf{F} = (F, K')$ *deux L-systèmes, et* $f \in E_\tau^F$. *On dira que* f *est un plongement de* $\mathbf{F}$ *dans* $\mathbf{E}$ *ssi* f *est injective et* $K' = f_L{}^*(K)$. *Ainsi* $f \in \mathrm{Mor}(\mathbf{F}, \mathbf{E})$ *et pour tout L-système* $\mathbf{G} = (G, K''), \forall g \in F_\tau^G, g \in \mathrm{Mor}(\mathbf{G}, \mathbf{F}) \Leftrightarrow f \circ g \in \mathrm{Mor}(\mathbf{G}, \mathbf{E})$ *ce qui constitue une injection de* $\mathrm{Mor}(\mathbf{G}, \mathbf{F})$ *dans* $\mathrm{Mor}(\mathbf{G}, \mathbf{E})$.

L'apparente hétérogénéité des deux conditions de cette définition, se résoud si on intègre au langage le symbole d'égalité interprété de façon standard, faisant de l'injectivité de f une conséquence de $K' = f_L{}^*(K)$.

Structure induite sur une partie. *Soit* $\mathbf{E} = (E, K)$ *un L-système, et* $F \subset E$. *Notons* $\mathbf{F} = \mathbf{E}_{|F} = (F, K \cap \Omega_L(F))$. *Ainsi* Id_F *est un plongement de* $\mathbf{F}$ *dans* $\mathbf{E}$, *et pour tout L-système* $\mathbf{G} = (G, K''), \mathrm{Mor}(\mathbf{G}, \mathbf{F}) = \mathrm{Mor}(\mathbf{G}, \mathbf{E}) \cap F_\tau^G$. *De plus,* $\forall f \in \mathrm{Mor}(\mathbf{E}, \mathbf{G}), f_{|F} \in \mathrm{Mor}(\mathbf{F}, \mathbf{G})$.

Produit de systèmes. *Pour toute famille* $(\mathbf{E}_i)_{i\in I}$ *de L-systèmes* $\mathbf{E}_i = (E_i, K_i)$, *on définit son* produit *comme étant le L-système défini par*

$$\mathbf{F} = \prod_{i\in I} \mathbf{E}_i = \left(\hat{\prod_{i\in I}} E_i, \bigcap_{i\in I} {\pi_i}_L{}^*(K_i) \right)$$

où π_i *est la projection canonique de* $\hat{\prod}_{i\in I} E_i$ *dans* E_i. *Alors* $\forall i \in I, \pi_i \in \mathrm{Mor}(\mathbf{F}, \mathbf{E}_i)$, *et pour tout L-système* $\mathbf{G} = (G, K')$, *on a une bijection canonique*

$$\mathrm{Mor}(\mathbf{G}, \mathbf{F}) \simeq \prod_{i\in I} \mathrm{Mor}(\mathbf{G}, \mathbf{E}_i)$$

définie par $F_\tau^G \ni f \mapsto (\pi_i \circ f)_{i\in I}$, *i.e. restriction de la bijection classique* $(\prod_{i\in I} E_i)^G \simeq \prod_{i\in I} (E_i^G)$.

Proposition. *Soient* F *un* τ*-ensemble, et* $(\mathbf{E}_i)_{i\in I}$ *une famille de L-systèmes* $\mathbf{E}_i = (E_i, K_i)$, *chacun muni d'une* τ*-application* f_i *de* E_i *vers* F. *Alors l'ensemble* $K = \bigcup_{i\in I} {f_i}_L[K_i]$ *est l'unique partie de* $\Omega_L(F)$ *satisfaisant les conditions suivantes, notant* $\mathbf{F} = (F, K)$:

$$\forall i \in I, f_i \in \mathrm{Mor}(\mathbf{E}_i, \mathbf{F})$$

$$\textit{Pour tout L-système } \mathbf{G} = (G, K'), \forall g \in G_\tau^F, g \in \mathrm{Mor}(\mathbf{F}, \mathbf{G}) \Leftrightarrow \forall i \in I, g \circ f_i \in \mathrm{Mor}(\mathbf{E}_i, \mathbf{G})$$

Preuve. Notons $K_0 = \bigcup_{i\in I} {f_i}_L[K_i]$. La première condition équivaut à $K_0 \subset K$. Puis, on a

$$(\forall i \in I, g \circ f_i \in \mathrm{Mor}(\mathbf{E}_i, \mathbf{G})) \Leftrightarrow (\forall i \in I, {f_i}_L[K_i] \subset g_L{}^*(K')) \Leftrightarrow K_0 \subset g_L{}^*(K')$$

ce qui simplifie la deuxième condition en $(K \subset g_L{}^*(K') \Leftrightarrow K_0 \subset g_L{}^*(K'))$.

Il apparaît déjà que ces conditions sont satisfaites lorsque $K = K_0$.

Pour montrer qu'il n'y a pas d'autres solutions, prenons $G = F$ et $g = \mathrm{Id}_F$. La condition s'écrit alors $\forall K' \subset \Omega_L(F), K \subset K' \Leftrightarrow K_0 \subset K'$, donc $K = K_0$. □

Quotientages. *Soient* $\mathbf{E} = (E, K), \mathbf{F} = (F, K')$ *deux L-systèmes, et* $f \in F_\tau^E$. *On dira que* f *est un quotientage de* $\mathbf{E}$ *sur* $\mathbf{F}$ *ssi* f *est surjective et* $K' = f_L[K]$. *Ainsi* $f \in \mathrm{Mor}(\mathbf{E}, \mathbf{F})$ *et pour tout L-système* $\mathbf{G} = (G, K''), \forall g \in G_\tau^F, g \in \mathrm{Mor}(\mathbf{F}, \mathbf{G}) \Leftrightarrow g \circ f \in \mathrm{Mor}(\mathbf{E}, \mathbf{G})$ *ce qui constitue une injection de* $\mathrm{Mor}(\mathbf{F}, \mathbf{G})$ *vers* $\mathrm{Mor}(\mathbf{E}, \mathbf{G})$.

L'apparente hétérogénéité des deux conditions de cette définition, se résoud si on intègre au langage le symbole d'égalité, faisant de la surjectivité de f une conséquence de $K' = f_L[K]$.

Pour tout τ-ensemble E, notons Eq_E l'ensemble des relations d'équivalence R sur E inférieures à $\underset{\tau}{\sim}$, i.e. telles que $\mathrm{Gr}\, R \subset E \times_\tau E$. Dans la suite on ne considèrera que les relations d'équivalence inférieures à $\underset{\tau}{\sim}$, de sorte que $E/R = \mathrm{Im}\, \overleftarrow{R}$ soit un τ-ensemble et $\overleftarrow{R} \in (E/R)_\tau^E$.

Quotient. *Pour tout* $\mathbf{E} = (E, K)$ *et* $R \in \mathrm{Eq}_E$*, on notera* $\mathbf{E}/R$ *le système* $(E/R, \overleftarrow{R}_{L'}[K])$*, appelé quotient de* $\mathbf{E}$ *par* R*. Ainsi* $\overleftarrow{R}$ *est un quotientage de* $\mathbf{E}$ *sur* $\mathbf{E}/R$*, et pour tout* L*-système* $\mathbf{F} = (F, K')$ *on a* $\mathrm{Mor}(\mathbf{E}/R, \mathbf{F}) \simeq \{f \in \mathrm{Mor}(\mathbf{E}, \mathbf{F}) | R < \underset{f}{\sim}\}$ *par* $g \mapsto g \circ \overleftarrow{R}$ *d'inverse* $f \mapsto f/R$*.*

Coproduit. *Pour toute famille* $(\mathbf{E}_i)_{i \in I}$ *de* L*-systèmes* $\mathbf{E}_i = (E_i, K_i)$*, on définit son* coproduit *comme étant*

$$\mathbf{F} = \coprod_{i \in I} \mathbf{E}_i = \left(\coprod_{i \in I} E_i, \bigcup_{i \in I} j_{iL}[K_i] \right)$$

où j_i *est l'injection canonique de* E_i *dans* $\coprod_{i \in I} E_i$*. Alors* $\forall i \in I, j_i \in \mathrm{Mor}(\mathbf{E}_i, \mathbf{F})$*, et pour tout* L*-système* $\mathbf{G} = (G, K')$*, on a une bijection canonique*

$$\mathrm{Mor}(\mathbf{F}, \mathbf{G}) \simeq \prod_{i \in I} \mathrm{Mor}(\mathbf{E}_i, \mathbf{G})$$

définie par $f \mapsto (f \circ j_i)_{i \in I}$*, i.e. restriction de la bijection classique* $G^{\coprod_{i \in I} E_i} \simeq \prod_{i \in I} G^{E_i}$*.*

Décomposition canonique d'un morphisme. *Tout* $f \in \mathrm{Mor}(\mathbf{E}, \mathbf{F})$ *est égal à* $\mathrm{Id}_{\mathrm{Im}\, f} \circ (f/\underset{f}{\sim}) \circ \underset{f}{\overleftarrow{\sim}}$ *où* $\mathrm{Id}_{\mathrm{Im}\, f}$ *est un plongement,* $f/\underset{f}{\sim} \in \mathrm{Mor}(\mathbf{E}/\underset{f}{\sim}, \mathrm{Im}\, f)$ *est bijectif et* $\underset{f}{\overleftarrow{\sim}}$ *est un quotientage. On dira que* f *est plein ssi* $f/\underset{f}{\sim}$ *est un isomorphisme de* $\mathbf{E}/\underset{f}{\sim}$ *sur* $\mathrm{Im}\, f$ *muni de la structure induite.*

Proposition. *Soient* $\mathbf{E} = (E, K), \mathbf{F} = (F, K')$ *deux* L*-systèmes, et* $f \in \mathrm{Mor}(\mathbf{E}, \mathbf{F}), g \in \mathrm{Mor}(\mathbf{F}, \mathbf{E})$ *tels que* $g \circ f = \mathrm{Id}_E$*. Alors* f *est un plongement et* g *est un quotientage.*

Preuves: f et g étant des morphismes,
$f_L^*(K') \subset f_L^*(g_L^*(K)) = K$ donc f est un plongement;
$K = g_L[f_L[K]] \subset g_L[K']$ donc g est un quotientage. □

Corollaire. *Soient* $\mathbf{E} = (E, K), \mathbf{F} = (F, K')$ *deux* L*-systèmes, et* $f \in \mathrm{Mor}(\mathbf{E}, \mathbf{F})$*. Alors* $\mathrm{Id}_E \times_\tau f$ *est un plongement de* $\mathbf{E}$ *dans* $\mathbf{E} \times_\tau \mathbf{F}$*, et* $\mathrm{Id}_F \sqcup f$ *est un quotientage de* $\mathbf{F} \sqcup \mathbf{E}$ *sur* $\mathbf{F}$*.*

Proposition. *Soient deux familles* $(\mathbf{E}_i)_{i \in I}$*,* $(\mathbf{F}_i)_{i \in I}$ *de* L*-systèmes, avec une famille* $(f_i)_{i \in I}$ *de* L*-morphismes* $f_i \in \mathrm{Mor}(\mathbf{E}_i, \mathbf{F}_i)$*. Soient* π_i *et* π'_i *les projections respectives de* $\prod_{k \in I} \mathbf{E}_k$ *dans* $\mathbf{E}_i$ *et de* $\prod_{k \in I} \mathbf{F}_k$ *dans* $\mathbf{F}_i$*, et* j_i *et* j'_i *les injections respectives de* $\mathbf{E}_i$ *dans* $\coprod_{k \in I} \mathbf{E}_k$ *et de* $\mathbf{F}_i$ *dans* $\coprod_{k \in I} \mathbf{F}_k$*. Soient*

$$g = \prod_{i \in I} f_i \circ \pi_i \in \mathrm{Mor}(\prod_{i \in I} \mathbf{E}_i, \prod_{i \in I} \mathbf{F}_i)$$
$$h = \coprod_{i \in I} j'_i \circ f_i \in \mathrm{Mor}(\coprod_{i \in I} \mathbf{E}_i, \coprod_{i \in I} \mathbf{F}_i)$$

Alors on a:
— Si les f_i *sont des plongements alors* g *et* h *aussi*
— Si les f_i *sont des quotientages alors* h *aussi; et de* AC_I *on le déduit aussi pour* g*.*

Preuves: notons dans un premier temps $\mathbf{E} = (E, K) = \prod_{i \in I} \mathbf{E}_i, \mathbf{F} = (F, K') = \prod_{i \in I} \mathbf{F}_i$. On a $\forall i \in I, f_i \circ \pi_i = \pi'_i \circ g$.

Si les f_i sont des plongements, $\forall x \in \Omega_L(E)$,

$$x \in K \Leftrightarrow \forall i \in I, \pi_{iL}(x) \in K_i \Leftrightarrow \forall i \in I, (f_i \circ \pi_i)_L(x) \in K'_i \Leftrightarrow g_L(x) \in K'.$$

Si les f_i sont des quotientages,

$$\forall (s, v) \in \Omega_L(F), (s, v) \in K \Leftrightarrow \forall i \in I, (s, \pi'_i \circ v) \in K'_i \Leftrightarrow \forall i \in I, \exists u, (s, u) \in K_i \text{ et } f_i \circ u = \pi'_i \circ v.$$

Au moyen de AC_I cela équivaut à $\exists (u_i)_{i \in I}, \forall i \in I, (s, u_i) \in K_i$ et $f_i \circ u_i = \pi'_i \circ v$. donc cela équivaut à l'existence d'un $u \in \Omega_L(E)$ tel que $\forall i \in I, (s, \pi_i \circ u) \in K_i$ et $\pi'_i \circ g \circ u = f_i \circ \pi_i \circ u = \pi'_i \circ v$, autrement dit $(s, u) \in K$ et $g \circ u = v$.

Notons dans un deuxième temps $\mathbf{E} = (E, K) = \coprod_{i \in I} \mathbf{E}_i$ et $\mathbf{F} = (F, K') = \coprod_{i \in I} \mathbf{F}_i$. On a $\forall i \in I, h \circ j_i = j'_i \circ f_i$.

Si les f_i sont des quotientages,

$$\forall y \in K', \exists i \in I, y \in {j'_i}_L[K'_i] = (j'_i \circ f_i)_L[K_i] = (h \circ j_i)_L[K_i] \subset h_L[K].$$

Si les f_i sont des plongements, soit $x = (s, u) \in \Omega_L(E)$ tel que $(s, h \circ u) \in K'$.
$\exists i \in I, \exists v, (s, v) \in K'_i, j'_i \circ v = h \circ u$.
$\forall a \in V_s, \exists i' \in I, \exists z \in E_{i'}, j_{i'}(z) = u(a)$ donc $j'_i(v(a)) = h(u(a)) = h(j_{i'}(z)) = j'_{i'}(f_{i'}(z))$. Donc $\mathrm{Im}(j'_i) \cap \mathrm{Im}(j'_{i'}) \neq \emptyset$. Donc $i = i'$. Par choix fini $\exists w \in {E_i}_\tau^{V_s}, j_i \circ w = u$ donc $j'_i \circ v = h \circ u = h \circ j_i \circ w = j'_i \circ f_i \circ w$. Or j'_i est injective donc $v = f_i \circ w$. Or $(s, v) \in K'_i$ et f_i est un plongement donc $(s, w) \in K_i$. Finalement, de $j_i \circ w = u$ on conclut $x \in K$. □

4.4. Théories relationnelles algébriques

Définition. *Soit L un langage relationnel. On appellera L-condition relationnelle algébrique, tout triplet (B, H, H') où B et H sont des ensembles finis et $H, H' \subset \Omega_L(B)$. On dira qu'un L-système $\mathbf{E}$ satisfait (B, H, H') ssi $\mathrm{Mor}((B, H), \mathbf{E}) \subset \mathrm{Mor}((B, H'), \mathbf{E})$. On appellera L-axiomatique, tout ensemble de L-conditions relationnelles algébriques.*

Définition. *On appellera théorie relationnelle algébrique, tout couple $T = (L, A)$ où L est un langage relationnel et A est une L-axiomatique, dont les éléments sont appelés les axiomes de T. On appellera T-système, tout L-système satisfaisant tous les axiomes de T.*

Exemple : avec une seule sorte, prenons un langage constitué d'un seul symbole s dont l'arité est la paire standard (domaine des couples), et soient x, y, z trois objets deux à deux distincts. Les structures sur ce langage sont donc les relations binaires. Alors la condition de réflexivité s'écrit $(\{x\}, \emptyset, \{(s, (x, x))\})$. La condition de symétrie s'écrit $(\{x, y\}, \{(s, (x, y))\}, \{(s, (y, x))\})$. La condition de transitivité s'écrit $(\{x, y, z\}, \{(s, (x, y)), (s, (y, z))\}, \{(s, (x, z))\})$. Ainsi, la notion de préordre est une théorie relationnelle algébrique à deux axiomes, et celle de relation d'équivalence est une théorie relationnelle algébrique à trois axiomes.

Proposition. *Soient F un τ-ensemble, et $(\mathbf{E}_i)_{i \in I}$ une famille de T-systèmes $\mathbf{E}_i = (E_i, K_i)$, chacune munie d'une τ-application f_i de F vers E_i. Alors $\mathbf{F} = (F, K)$ où $K = \bigcap_{i \in I} {f_i}_L^*(K_i)$, est un T-système.*

Preuve: $\forall (B, H, H') \in A, \forall g \in \mathrm{Mor}((B, H), \mathbf{F})$ on a $\forall i \in I, f_i \circ g \in \mathrm{Mor}((B, H), \mathbf{E}_i)$, or chaque $\mathbf{E}_i$ est un T-système donc $\forall i \in I, f_i \circ g \in \mathrm{Mor}((B, H'), \mathbf{E}_i)$ donc $g \in \mathrm{Mor}((B, H'), \mathbf{F})$. □

Corollaire. *Tout produit de T-systèmes est un T-système; la structure induite sur toute partie d'un T-système est un T-système.*

On voit aussi que pour tout τ-ensemble E, l'ensemble des K tel que (E, K) satisfait tous les axiomes de T, est stable par intersections. Ceci définit donc une clôture $\mathrm{Cl}_{A,E}$ dans $\mathcal{P}(\Omega_L(E))$, dont les éléments clos sont les K tels que (E, K) est un T-système. De plus, cette clôture est finitaire du fait que dans tout axiome (B, H, H'), H est supposé fini. En effet, c'est la clôture engendrée par $\{(f_L[H], f_L(x)) | (B, H, H') \in A, f \in E_\tau^B, x \in H'\} \subset \mathcal{P}(\Omega_L(E)) \times \Omega_L(E)$.

Proposition. *Soit (E, K) un L-système, et $K' \subset \mathrm{Cl}_{A,E}(K)$. Alors pour tout T-système $\mathbf{F}$ on a $\mathrm{Mor}((E, K), \mathbf{F}) = \mathrm{Mor}((E, \mathrm{Cl}_{A,E}(K)), \mathbf{F}) \subset \mathrm{Mor}((E, K'), \mathbf{F})$.*

Preuve: notant $\mathbf{F} = (F, K_1)$, pour tout $f \in \mathrm{Mor}((E, K), \mathbf{F})$, ${f_L}^*(K_1)$ est une T-structure plus grande que K, donc $K' \subset \mathrm{Cl}_{A,E}(K) \subset {f_L}^*(K_1)$, i.e. $f \in \mathrm{Mor}((E, K'), \mathbf{F})$. Le reste en découle. □

Définition. *Soit un langage L et soient A, A' deux L-axiomatiques. On dira que A est plus forte que A' ssi $\forall (B, H, H') \in A', H' \subset \mathrm{Cl}_{A,B}(H)$, ce qui équivaut à : tout (L, A)-système est un (L, A')-système. On dira que A et A' sont équivalentes ssi A est plus forte que A' et A' plus forte que A.*

L'implication directe vient de la proposition précédente. Réciproquement, $\forall (B, H, H') \in A'$, $(B, \mathrm{Cl}_{A,B}(H))$ est un (L, A)-système. Donc si cela en fait un (L, A')-système, il satisfait (B, H, H'), donc $\mathrm{Id}_B \in \mathrm{Mor}((B, H), (B, \mathrm{Cl}_{A,B}(H))) \subset \mathrm{Mor}((B, H'), (B, \mathrm{Cl}_{A,B}(H)))$ donc $H' \subset \mathrm{Cl}_{A,B}(H)$. □

Définition. *Une théorie relationnelle algébrique sera dite égalitaire ssi elle comporte pour chaque sorte c un symbole $\approx_c \in L$, dit "symbole d'égalité", muni des axiomes suivants appelés axiomes de l'égalité: d'abord l'axiome de réflexivité sur chaque $\approx_c$, puis, au choix: $\forall s \in L, \forall a \in V_s$, l'axiome, notant $a' \notin V_s$ un objet de même sorte que a,*

$$(V_s \cup \{a'\}, \{(s, \mathrm{Id}_{V_s}), (\approx_{\tau(a)}, (a, a'))\}, \{(s, b \mapsto (a', b)(b = a))\})$$

ou de manière équivalente, $\forall s \in L$, notant j_s et j'_s les deux injections canoniques de V_s dans $V_s \sqcup V_s$, l'axiome

$$(V_s \sqcup V_s, \{(s, j_s)\} \cup \{(\approx_{\tau(a)}, (j_s(a), j'_s(a))) | a \in V_s\}, \{(s, j'_s)\})$$

La preuve de l'équivalence de ces deux axiomatiques est aisée, au moyen de la réflexivité dans un sens, et du fait que tous les symboles sont d'arité finie dans l'autre sens.

Intuitivement, ces axiomes se lisent respectivement, notant n le nombre d'éléments de V_s et sous-entendant les domaines adéquats : "$\forall i \in \{1, \cdots, n\}, \forall (x_1, \cdots, x_n), \forall x', (s(x_1, \cdots, x_n)$ et $x_i \approx x') \Rightarrow s(x_1, \cdots, x_{i-1}, x', x_{i+1}, \cdots, x_n)$" et "$\forall (x_1, \cdots, x_n), \forall (y_1, \cdots, y_n), (s(x_1, \cdots, x_n)$ et $\forall i \in \{1, \cdots, n\}, x_i \approx y_i) \Rightarrow s(y_1, \cdots, y_n)$".

En particulier, ces axiomes (où on a déjà inclus la réflexivité) appliqués au symbole $\approx_{\tau(a)}$ lui-même, sont équivalents aux axiomes de relation d'équivalence.

Soit $T = (L, A)$ une théorie relationnelle algébrique égalitaire, et $\mathbf{E} = (E, K)$ un L-système. Alors on a équivalence entre ($\mathbf{E}$ est un T-système) et (il existe un T-système $\mathbf{F} = (F, K')$ où tous les $\approx_c$ s'interprètent par l'égalité, et une τ-application surjective f de $\mathbf{E}$ dans $\mathbf{F}$ telle que $f^*_L(K') = K$ (on obtient $\mathbf{F}$ en quotientant E par la relation d'équivalence donnée par les interprétations des $\approx_c$).

Remarque: deux symboles d'égalité pour une même sorte, avec à la fois ces axiomes de l'égalité d'un symbole sur l'autre et inversement, auront toujours la même interprétation dans tout système.

Dans une telle théorie égalitaire, on peut exprimer la condition d'antisymétrie pour un symbole s d'arité la paire standard, sous la forme $(\{x, y\}, \{(s, (x, y)), (s, (y, x))\}, \{(\approx, (x, y))\})$.

4.5. Magmas

Nous allons maintenant faire entrer les autres langages dans les constructions précédentes.

Soit donc L un langage mixte, i.e. $L = L_0 \cup L_1$ où L_0 est un langage relationnel et L_1 est un langage algébrique. Soit le langage relationnel L' obtenu à partir de L en remplaçant chaque symbole algébrique $s \in L_1$ par un symbole relationnel s' d'arité $V_{s'} = V_s \cup \{s\}$, qu'on notera $V_s{}'$, et où on suppose $s \notin V_s$.

Notons pour tout τ-ensemble E, $\Omega'_L(E) = \Omega_{L_0}(E) \cup (\Omega_{L_1}(E) \times_\tau E) \simeq \Omega_{L'}(E)$.

On appellera L-magma tout couple (E, K) où E est un τ-ensemble et $K \subset \Omega'_L(E)$. C'est donc la traduction d'un L'-système relationnel. On définit ainsi la notion de L-morphisme entre L-magmas comme coïncidant avec celle de L'-morphisme entre L'-systèmes.

Pour simplifier la présentation, nous allons dorénavant et jusqu'à mention contraire, supposer que $L_0 = \emptyset$, de sorte que $\Omega'_L(E) = \Omega_L(E) \times_\tau E$.

Alors pour tous τ-ensembles E et F, $\forall f \in F^E_\tau, \forall (x, y) \in \Omega'_L(E), f_{L'}(x, y) = (f_L(x), f(y))$.

Ainsi, pour deux L-magmas $\mathbf{E} = (E, K)$ et $\mathbf{F} = (F, K')$ on a

$$\forall f \in F^E_\tau, f \in \mathrm{Mor}(\mathbf{E}, \mathbf{F}) \Leftrightarrow \forall (x, y) \in K, (f_L(x), f(y)) \in K'.$$

Pour tout L-magma $\mathbf{E} = (E, K)$ et tout $F \subset E$, on dira que F est stable ssi il appartient à

$$\begin{aligned}\mathrm{St}(\mathbf{E}) &= \{F \subset E | \forall (x, y) \in K, \mathrm{Im}'(x) \subset F \Rightarrow y \in F\} \\ &= \{F \subset E | \forall x \in \Omega_L(F), \forall y \in E, (x, y) \in K \Rightarrow y \in F\}.\end{aligned}$$

On reconnaît ici l'orthogonal de $\{(\mathrm{Im}'(x), y) | (x, y) \in K\} \subset \mathcal{P}(E) \times E$ de l'étude du théorème du point fixe. Ainsi $\mathrm{St}(\mathbf{E})$ est stable par intersections.

Notons la clôture obtenue $\mathrm{Cl} \in \mathrm{St}(\mathbf{E})^{\mathcal{P}(E)}$ définie par $\forall A \subset E, \mathrm{Cl}(A) : \min\{F \in \mathrm{St}(\mathbf{E}) | A \subset F\}$.

Pour tout $A \subset E$, l'ensemble $\mathrm{Cl}(A)$ sera appelé la partie de $\mathbf{E}$ engendrée par A.

On appellera partie minimale de $\mathbf{E}$ l'ensemble $\mathrm{Min}_{\mathbf{E}} = \mathrm{Cl}(\emptyset) : \min \mathrm{St}(\mathbf{E})$.

Une partie $A \subset E$ sera dite génératrice ssi $\mathrm{Cl}(A) = E$.

Appelons *base de* $\mathbf{E}$ l'ensemble $\underline{\mathbf{E}} = \{y \in E | \forall x \in \Omega_L(E), (x, y) \notin K\}$.

On appelle *diagonale* d'un ensemble E l'ensemble $\delta_E = \mathrm{Im}(\mathrm{Id}_E \times \mathrm{Id}_E) = \mathrm{Gr}(\mathrm{Id}_E)$, aussi égal au graphe de l'égalité dans $E \times E$.

Définitions. *Un L-magma $\mathbf{E} = (E, K)$ sera dit:*
— *fondé ssi la base de $\mathbf{E}$ est génératrice, i.e.* $\mathrm{Cl}(\underline{\mathbf{E}}) = E$.
— *minimal ssi* $\mathrm{St}(\mathbf{E}) = \{E\}$, *i.e.* $\mathrm{Min}_{\mathbf{E}} = E$.
— *condensé ssi* $\forall x \in \Omega_L(E), !y \in E, (x, y) \in K$
— *une L-suralgèbre ssi* $\forall x \in \Omega_L(E), \exists y \in E, (x, y) \in K$
— *une L-algèbre ssi* $\forall x \in \Omega_L(E), \exists! y \in E, (x, y) \in K$, *i.e. c'est une L-suralgèbre condensée.*

— *semi-libre ssi* $\forall y \in E, !x \in \Omega_L(E), (x,y) \in K$.
— *libre ssi il est semi-libre et fondé*

Proposition. *On a les propriétés suivantes*
1) $\forall A \subset E, \forall y \in E, y \in \mathrm{Cl}(A) \Leftrightarrow (y \in A \text{ ou } \exists x \in \Omega_L(\mathrm{Cl}(A)), (x,y) \in K)$.
2) $\underline{\mathbf{E}} \cap \mathrm{Min}_{\mathbf{E}} = \emptyset$.
3) ($\mathbf{E}$ *minimal*) $\Leftrightarrow$ ($\mathbf{E}$ *est fondé et* $\underline{\mathbf{E}} = \emptyset$)
4) ($\mathbf{E}$ *condensé*) $\Leftrightarrow \delta_E \in \mathrm{St}(\mathbf{E}\times\mathbf{E})$.
5) Le graphe de tout morphisme vers un magma condensé est stable.

1) exprime le théorème du point fixe. Il en résulte 2) puis 3); 4) et 5) sont immédiats. □

Morphismes directs. *Soient deux* L*-magmas* $\mathbf{E} = (E,K)$ *et* $\mathbf{F} = (F,K')$. *Un morphisme* $f \in \mathrm{Mor}(\mathbf{E},\mathbf{F})$ *sera dit direct ssi* $\forall x \in \Omega_L(E), \forall y \in F, (f_L(x),y) \in K' \Rightarrow \exists z \in E, f(z) = y \text{ et } (x,z) \in K$. *Il sera dit codirect ssi* $\forall x \in E, \forall y \in \Omega_L(F), (y, f(x)) \in K' \Rightarrow \exists z \in \Omega_L(E), (z,x) \in K \text{ et } f_L(z) = y$.

En pratique on n'utilisera pas la notion de morphisme codirect, faute d'exemples qui puissent venir naturellement. Par contre, voici des classes d'exemples naturels de morphismes directs:
— Tout morphisme d'une suralgèbre vers un magma condensé. En particulier, tout morphisme entre algèbres.
— Tout plongement dont l'image est stable.
— Si $\mathbf{E}$ est une suralgèbre alors la projection canonique de $\mathbf{E} \times_\tau \mathbf{F}$ sur $\mathbf{F}$ est directe.
— La restriction de tout morphisme direct à une partie stable est directe.
— Le composé de deux morphismes directs est direct.
Des formules de transport de clôture, découlent les propriétés suivantes:

Proposition. *Pour tous* L*-magmas* $\mathbf{E}$, $\mathbf{F}$, *et tout* $f \in \mathrm{Mor}(\mathbf{E},\mathbf{F})$, *on a*
1) $\forall B \in \mathrm{St}(\mathbf{F}), f^*(B) \in \mathrm{St}(\mathbf{E})$
2) $\forall A \subset E, f[\mathrm{Cl}_E(A)] \subset \mathrm{Cl}_F(f[A])$*; en particulier* $f[\mathrm{Min}_{\mathbf{E}}] \subset \mathrm{Min}_{\mathbf{F}}$.
3) Si f *est direct,* $\forall A \in \mathrm{St}(\mathbf{E}), f[A] \in \mathrm{St}(\mathbf{F})$
4) Si f *est direct,* $\forall A \subset E, f[\mathrm{Cl}_E(A)] = \mathrm{Cl}_F(f[A])$*; en particulier,* $f[\mathrm{Min}_{\mathbf{E}}] = \mathrm{Min}_{\mathbf{F}}$..
5) Si f *est codirect,* $\forall B \subset F$,

Proposition. *Soit* $\mathbf{E}$ *un* L*-magma, et* F *une partie de* E, *muni de la structure de* L*-magma induite par celle de* $\mathbf{E}$. *Alors*
1) $\forall A \in \mathrm{St}(\mathbf{E}), A \cap F \in \mathrm{St}(\mathbf{F})$
2) $\forall A \subset F, \mathrm{Cl}_{\mathbf{F}}(A) \subset \mathrm{Cl}_{\mathbf{E}}(A)$*; en particulier* $\mathrm{Min}_{\mathbf{F}} \subset \mathrm{Min}_{\mathbf{E}}$.
Si de plus $F \in \mathrm{St}(\mathbf{E})$ *alors*
3) $\mathrm{St}(\mathbf{F}) \subset \mathrm{St}(\mathbf{E})$, *et plus précisément* $\mathrm{St}(\mathbf{F}) = \mathrm{St}(\mathbf{E}) \cap \mathcal{P}(F)$
4) $\forall A \subset F, \mathrm{Cl}_{\mathbf{E}}(A) = \mathrm{Cl}_{\mathbf{F}}(A)$*; en particulier,* $\mathrm{Min}_{\mathbf{E}} = \mathrm{Min}_{\mathbf{F}}$.

Il en découle que pour tout L-magma $\mathbf{E}$, le L-magma $\mathrm{Min}_{\mathbf{E}}$ est minimal.

Proposition. *Soient* $\mathbf{E} = (E,K)$ *et* $\mathbf{F} = (F,K')$ *deux* L*-magmas avec* $\mathbf{F}$ *condensé, et soient* $f,g \in \mathrm{Mor}(\mathbf{E},\mathbf{F})$. *Alors* $\{x \in E | f(x) = g(x)\} \in \mathrm{St}(\mathbf{E})$.

Preuve. Soit $A = \{x \in E | f(x) = g(x)\}$.
$\forall (x,y) \in K, \mathrm{Im}'(x) \subset A \Rightarrow (f_L(x) = g_L(x) \text{ et } (f_L(x), f(y)) \in K' \text{ et } (g_L(x), g(y)) \in K') \Rightarrow y \in A$. □

Corollaire. *Soient* $\mathbf{E}$ *minimal,* $\mathbf{F}$ *condensé. Alors* $\forall f,g \in \mathrm{Mor}(\mathbf{E},\mathbf{F}), f = g$.

Rassemblons les résultats précédents: pour tous L-magmas $\mathbf{E}$, $\mathbf{F}$ avec $\mathbf{F}$ condensé et tout $f \in \mathrm{Mor}(\mathbf{E},\mathbf{F})$, la restriction de f à $\mathrm{Min}_{\mathbf{E}}$ est l'unique L-morphisme du L-magma minimal $\mathrm{Min}_{\mathbf{E}}$ vers le L-magma minimal $\mathrm{Min}_{\mathbf{F}}$. On voit alors l'intérêt particulier d'étudier les morphismes entre L-magmas minimaux condensés.

Proposition. *Soient* $\mathbf{E}$ *et* $\mathbf{F}$ *minimaux condensés,* $f \in \mathrm{Mor}(\mathbf{E},\mathbf{F})$ *et* $g \in \mathrm{Mor}(\mathbf{F},\mathbf{E})$. *Alors* f *est un isomorphisme de* $\mathbf{E}$ *sur* $\mathbf{F}$ *et* g *est son inverse.*

Preuve: $g \circ f \in \mathrm{Mor}(\mathbf{E},\mathbf{E})$ et $\mathrm{Id}_E \in \mathrm{Mor}(\mathbf{E},\mathbf{E}) \Rightarrow g \circ f = \mathrm{Id}_E$, et de même pour $f \circ g$. □

4.6. Algèbres

Une L-algèbre s'écrit $\mathbf{E} = (E, \mathrm{Gr}\,\phi)$ où $\phi \in E_\tau^{\Omega_L(E)}$, ce qu'on notera abusivement $\mathbf{E} = (E,\phi)$.

Dans le cas d'un langage mixte $L = L_0 \cup L_1$ où L_1 est un langage relationnel et L_1 un langage algébrique, on appellera L-système tout L-magma dont la restriction à L_1 forme une L_1-algèbre, ce qu'on pourra écrire $\mathbf{A} = (A,K,\phi)$ où $K \subset \Omega_{L_0}(A)$ et ϕ est une τ-application de $\Omega_{L_1}(A)$ dans A.

Mais revenons au cas d'un langage algébrique, où donc les systèmes sont les algèbres.

On remarque que

$$E_\tau^{\Omega_L(E)} \simeq \prod_{s\in L} (E|_{\tau(s)})^{E_\tau^{V_s}}$$

autrement dit $\phi = \coprod_{s\in L} \phi_s$ où $\phi_s \in: E_\tau^{V_s} \to E|_{\tau(s)}$ est l'interprétation de s dans cette algèbre. C'est sous la forme de cette famille $(\phi_s)_{s\in L}$ que la notion de L-algèbre est plus classiquement et intuitivement présentée.

Soient $\mathbf{E} = (E, \phi)$ une L-algèbre et $\mathbf{F} = (F, K')$ un L-magma quelconque. Alors

$$\forall f \in F_\tau^E, f \in \mathrm{Mor}(\mathbf{E}, \mathbf{F}) \Leftrightarrow \forall x \in \Omega_L(E), (f_L(x), f(\phi(x))) \in K'$$
$$\forall f \in E_\tau^F, f \in \mathrm{Mor}(\mathbf{F}, \mathbf{E}) \Leftrightarrow \forall (x, y) \in K', \phi(f_L(x)) = f(y).$$

Enfin, pour deux L-algèbres $\mathbf{E} = (E, \phi)$ et $\mathbf{F} = (F, \phi')$ on a

$$\forall f \in F_\tau^E, f \in \mathrm{Mor}(\mathbf{E}, \mathbf{F}) \Leftrightarrow \phi' \circ f_L = f \circ \phi \Leftrightarrow \forall (s, u) \in \Omega_L(E), \phi'(s, f \circ u) = f(\phi(s, u)).$$

Sous-algèbre. *Soit $\mathbf{E} = (E, \phi)$ une L-algèbre, et $F \subset E$. On dit que F est une sous-algèbre de $\mathbf{E}$ ssi elle satisfait les conditions suivantes qui sont équivalentes:*
— $F \in \mathrm{St}(\mathbf{E})$
— *F muni de la structure de L-magma induite par celle de $\mathbf{E}$, est une L-algèbre*
— $\phi[\Omega_L(F)] \subset F$.
Alors cette structure d'algèbre induite sur F coïncide avec $\phi_{|\Omega_L(F)}$. C'est l'unique structure de L-algèbre sur F telle que l'injection canonique de F dans E soit un L-morphisme.

Les sous-algèbres d'une sous-algèbre A de E, sont les sous-algèbres de E incluses dans A.

Produit d'algèbres. *Le produit de toute famille $(\mathbf{E}_i)_{i\in I}$ de L-algèbres $\mathbf{E}_i = (E_i, \phi_i)$ est la L-algèbre $(F, \phi) = \mathbf{F}$ où $F = \hat{\prod}_{i\in I} E_i$ et $\phi = \hat{\prod}_{i\in I} \phi_i \circ \pi_{iL}$, i.e. ϕ est défini par $\forall i \in I, \phi_i \circ \pi_{iL} = \pi_i \circ \phi$.*

Preuve: le L-magma $\mathbf{F} = (F, K) = \prod_{i\in I} \mathbf{E}_i$ satisfait

$$\begin{aligned}\forall (x, y) \in \Omega'_L(F), (x, y) \in K &\Leftrightarrow \forall i \in I, (x, y) \in \pi_{iL'}^*(\mathrm{Gr}\,\phi_i)\\ &\Leftrightarrow \forall i \in I, (\pi_{iL}(x), \pi_i(y)) \in \mathrm{Gr}\,\phi_i\\ &\Leftrightarrow \forall i \in I, \phi_i(\pi_{iL}(x)) = \pi_i(y)\\ &\Leftrightarrow y = (\phi_i(\pi_{iL}(x)))_{i\in I}\end{aligned}$$

□

Algèbre unité. *On appellera L-algèbre unité et on notera 1_L, le produit de la famille vide de L-algèbre. C'est donc une copie de l'ensemble des sortes, munie de la structure de L-algèbre trivialement définie comme étant la seule possible. Alors pour tout L-magma $\mathbf{E}$ il existe un unique L-morphisme de $\mathbf{E}$ dans 1_L.*

Image directe d'une algèbre. *Soient $\mathbf{E} = (E, \phi), \mathbf{F} = (F, \phi')$ deux L-algèbres, $f \in \mathrm{Mor}(\mathbf{E}, \mathbf{F})$. Alors $\mathrm{Im}\, f$ est une sous-algèbre de F.*

C'est un cas particulier d'une propriété déjà vue. Ou encore : $\phi'[\Omega_L(\mathrm{Im}\, f)] = \phi'[\mathrm{Im}(f_L)] = \mathrm{Im}(\phi' \circ f_L) = \mathrm{Im}(f \circ \phi) \subset \mathrm{Im}\, f$. □

De même pour toute sous-algèbre A de E, $f[A]$ est une sous-algèbre de F.

Tout morphisme entre algèbres est plein (et donc les intermédiaires de la décomposition sont aussi des algèbres). En effet, $\forall x' \in \Omega_L(\mathrm{Im}\, f), \exists x \in \Omega_L(E), f_L(x) = x'$ et $f(\phi(x)) = \phi'(x')$.

En particulier, tout L-morphisme bijectif entre L-algèbre est un isomorphisme, ce qui se revérifie en écrivant pour $g = f^{-1}$, $\phi \circ g_L = g \circ f \circ \phi \circ g_L = g \circ \phi' \circ f_L \circ g_L = g \circ \phi'$.

Proposition. *Soient $\mathbf{E} = (E, K)$ un L-magma, $\mathbf{F} = (F, K')$ une L-algèbre, et $f \in F_\tau^E$. Alors*

$$f \in \mathrm{Mor}(\mathbf{E}, \mathbf{F}) \Leftrightarrow \mathrm{Gr}(f) \in \mathrm{St}(\mathbf{E} \times \mathbf{F})$$

Preuve:

$$\begin{aligned}f \in \mathrm{Mor}(\mathbf{E}, \mathbf{F}) &\Leftrightarrow \forall (x, y) \in K, (f_L(x), f(y)) \in K'\\ &\Leftrightarrow \forall (x, y) \in K, \forall z \in F, (f_L(x), z) \in K' \Rightarrow z = f(y)\\ &\Leftrightarrow \forall (x, y) \in K, \forall (x', z) \in K', x' = f_L(x) \Rightarrow z = f(y)\\ &\Leftrightarrow \mathrm{Gr}(f) \in \mathrm{St}(\mathbf{E} \times \mathbf{F})\end{aligned}$$

4.7. Condensation

Le produit de toute famille de L-magmas condensés est condensé.
Le magma induit sur toute partie d'un magma condensé est condensé.
Si $K \subset K' \subset \Omega'_L(E)$ et (E, K') est condensé alors (E, K) est condensé.
Ces trois énoncés se rassemblent en l'énoncé suivant:

Proposition. *Pour tout magma* $\mathbf{E}$*, s'il existe une famille de magmas condensés* $(\mathbf{F}_i)_{i\in I}$ *avec des morphismes* $f_i \in \mathrm{Mor}(\mathbf{E}, \mathbf{F}_i)$ *telle que* $\prod_{i\in I} f_i$ *est injective, alors* $\mathbf{E}$ *est condensé.*

Preuve: notant $\mathbf{E} = (E, K)$ et $\mathbf{F}_i = (F_i, K'_i)$, soient $x \in \Omega_L(E)$ et $y, z \in E$ tels que $(x, y) \in K$ et $(x, z) \in K$. Alors $\forall i \in I, ({f_i}_L(x), f_i(y)) \in K'_i$ et $({f_i}_L(x), f_i(z)) \in K'_i$ donc $f_i(y) = f_i(z)$ car $\mathbf{F}_i$ est condensé. De l'injectivité de $\prod_{i\in I} f_i$ il en résulte $y = z$. □

Si $\mathbf{F}$ est condensé alors, de l'injectivité de $f/\underset{f}{\sim}$ il résulte que $\mathbf{E}/\underset{f}{\sim}$ est condensé.

Congruence. *Soit* $\mathbf{E} = (E, K)$ *un* L*-magma. Une relation* $R \in \mathrm{Eq}_E$ *sera appelée une congruence et on note* $R \in \mathrm{Eq}_{\mathbf{E}}$ *ssi* $\mathbf{E}/R$ *est condensé. L'ensemble* $\mathrm{Eq}_{\mathbf{E}}$ *des congruences est stable par borne inférieure.*

Preuve 1: Soit $B \subset \mathrm{Eq}_E$ un ensemble de congruences, et $S = \inf B$.
$\forall R \in B$, $\overleftarrow{R} \in \mathrm{Mor}(\mathbf{E}, \mathbf{E}/R)$ or $S < R$ donc $\overleftarrow{R}/S \in \mathrm{Mor}(\mathbf{E}/S, \mathbf{E}/R)$. De plus $\mathbf{E}/R$ est condensé.
Puis, $S = \inf B$ est la relation d'équivalence associée à $\prod_{R\in B} \overleftarrow{R}$. Donc $\prod_{R\in B} \overleftarrow{R}/S$ est injective.
Par la proposition précédente, $\mathbf{E}/S$ est condensé. □
Preuve 2: soient π, π' les deux projections de $\mathbf{E} \times \mathbf{E}$ dans $\mathbf{E}$.
($\mathbf{E}/R$ est condensé) $\Leftrightarrow$ $(\delta(E/R) \in \mathrm{St}(\mathbf{E}/R \times \mathbf{E}/R))$ $\Leftrightarrow$ $(((\overleftarrow{R} \circ \pi) \times (\overleftarrow{R} \circ \pi'))^*(\delta(E/R)) \in \mathrm{St}(\mathbf{E} \times \mathbf{E}))$ or $((\overleftarrow{R} \circ \pi) \times (\overleftarrow{R} \circ \pi'))^*(\delta(E/R))$ est simplement le graphe de R. Par ailleurs toute borne inférieure d'un ensemble de relations d'équivalence, est aussi une relation d'équivalence.

Condensé d'un magma. *Pour tout magma* $\mathbf{E}$ *on appellera condensé de* $\mathbf{E}$ *et on notera* $\mathrm{Cond}(\mathbf{E})$ *le quotient de* $\mathbf{E}$ *par le plus petit élément* S *de* $\mathrm{Eq}_{\mathbf{E}}$*. Finalement, pour tout* L*-magma condensé* $\mathbf{F}$ *on a une bijection canonique* $\mathrm{Mor}(\mathbf{E}, \mathbf{F}) \simeq \mathrm{Mor}(\mathbf{E}/R, \mathbf{F})$ *à savoir* $f \mapsto f/R$*, d'inverse* $g \mapsto g \circ \overleftarrow{R}$.

Preuve: pour tout $f \in \mathrm{Mor}(\mathbf{E}, \mathbf{F})$, comme $\mathbf{F}$ est condensé, $\underset{f}{\sim} \in \mathrm{Eq}_{\mathbf{E}}$. Donc $R < \underset{f}{\sim}$. Donc il existe bien un unique $g = f/R \in \mathrm{Mor}(\mathbf{E}/R, \mathbf{F})$ tel que $f = g \circ \overleftarrow{R}$. □

Coproduit condensé. *Pour toute famille* $\mathbf{E}_i$ *de* L*-magmas, on appellera coproduit condensé des* $\mathbf{E}_i$ *le condensé du coproduit tel qu'il était défini sur les* L'*-structures relationnelles:*

$$\mathbf{F} = \overset{>}{\coprod_{i\in I}} \mathbf{E}_i = \mathrm{Cond}\left(\coprod_{i\in I} \mathbf{E}_i\right)$$

Il est muni d'une famille $(j_i)_{i\in I}$ *de morphismes* $j_i \in \mathrm{Mor}(\mathbf{E}_i, \mathbf{F})$ *satisfaisant: pour tout* L*-magma condensé* $\mathbf{G}$*, on a une bijection canonique*

$$(f_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} \mathrm{Mor}(\mathbf{E}_i, \mathbf{G}) \simeq \mathrm{Mor}(\mathbf{F}, \mathbf{G}) \ni g = \overset{>}{\coprod_{i\in I}} f_i$$
$$\forall i \in I, f_i = g \circ j_i$$

4.8. Théories algébriques

Nous allons maintenant évoquer brièvement la notion la plus générale (peut-être) de théorie algébrique, plus générale que celle de théorie relationnelle algébrique précédemment évoquée, tout en étant moins générale que celle de la théorie des modèles que nous verrons plus loin.

Soit un langage mixte L. Une condition algébrique sera un quintuplet (B, H, B', H', j) où B et H sont finis, (B, H) et (B', H') sont deux L-magmas, $j \in {B'}^B_\tau$, et $\mathrm{Im}\, j$ est une partie génératrice de (B', H'_1) où H'_1 est la partie de H' correspondant aux symboles d'opérations. On dira alors qu'un L-magma $\mathbf{A}$ satisfait la condition (B, B', H, H', j) ssi

$$\forall f \in \mathrm{Mor}((B, H), \mathbf{A}), \exists g \in \mathrm{Mor}((B', H'), \mathbf{A}), f = g \circ j.$$

Exercice. *Montrer que, vis-à-vis des magmas condensés, toute condition algébrique est équivalente à un ensemble de conditions algébriques ayant les mêmes B et H et où chaque B' et chaque H' est fini (et réciproquement).*

Une théorie algébrique générale est la donnée d'un langage L comportant sur chaque sorte un symbole d'égalité $\approx$, et avec comme axiomatique un ensemble de conditions algébriques, parmi lesquelles, au moins:

— les axiomes de l'égalité sur les $\approx$ vis-à-vis de tous les symboles;

— les axiomes de congruence sur les $\approx$ vis-à-vis des symboles d'opérations (ce sont encore des conditions relationnelles algébriques), qui assurent que le quotient par $\approx$ des magmas qui les satisfont soit condensé (en fait, tout magma satisfaisant ces axiomes sera assimilable à son quotient par ces $\approx$, et donc à un magma condensé);

— les axiomes de L-suralgèbre, qui sont pour chaque symbole s d'opération :

$$(V_s, \emptyset, {V_s}', \{(s, \mathrm{Id}_{V_s}, s)\}, \mathrm{Id}_{V_s})$$

On peut voir de deux manières possibles les conditions relationnelles algébriques comme cas particuliers de conditions algébriques: ou bien comme condition algébrique où $B' = B$ et $j = \mathrm{Id}_B$; ou bien comme condition algébrique alors que L est un langage purement relationnel, et où donc B' est la seule partie génératrice de (B', H'_1). (En effet, dans une théorie égalitaire, la condition (B, B', H, H', j) où $\mathrm{Im}\, j = B'$ équivaut à la condition relationnelle algébrique $(B, H, j^*(H')))$.

Remarquons que les symboles d'égalité peuvent être éliminés des H et H' et de ces autres axiomes: la condition obtenue en remplaçant B par son quotient par la congruence engendrée par les $\approx$ de H, et remplaçant B' par son quotient par la congruence engendrée par les $\approx$ de H et de H', est une condition équivalente, au sens d'équivalence de satisfaction sur tout magma satisfaisant les axiomes d'égalité et de congruence. (Note: cette équivalence fait appel à $\mathrm{AC}_{B'}$, ce qui n'est pas un problème puisqu'on a pu se ramener d'abord au cas où B' est fini).

Notons enfin un type particulier intéressant de théorie algébrique: les théories algébriques "pures" n'ayant pas d'autre symbole de relation que le symbole d'égalité, et où $H = \emptyset$ dans tous les axiomes autres que ceux d'égalité et de congruence. Reformulons ces dernières dans un nouveau formalisme (la vérification de cette équivalence est laissée en exercice).

Définition. *Soit L un langage algébrique. On appellera L-théorie tout couple $(M, (\mathbf{M}_i)_{i\in I})$ où:*
— M est un langage algébrique avec les mêmes sortes que celles de L
— $I = \{V_x | x \in M\}$
— Pour tout $i \in I$, définissons le langage $L_i = L \cup i$ où L et i sont supposés disjoints et i est vu comme un ensemble de constantes
— Pour tout $\in I$, $\mathbf{M}_i$ est un L_i-magma minimal (M_i, K_i) où $M_i = \{x \in M | V_x = i\}$ (qui forment donc une famille-partition de M).

Remarque: pour tout τ-ensemble E on a alors $\Omega_M(E) = \cup_{i\in I} M_i \times E^i_\tau$.

Définition. *Soit L un langage algébrique et $T = (M, (\mathbf{M}_i)_{i\in I})$ une L-théorie. On appellera T-algèbre toute L-algèbre $\mathbf{A} = (A, \phi)$ admettant aussi une structure de M-algèbre, i.e. $\psi \in A_\tau^{\Omega_M(A)}$ telle que $\forall i \in I, \forall \mu \in A^i_\tau, (M_i \ni x \mapsto \psi(x, \mu))$ est un L_i-morphisme de $\mathbf{M}_i$ vers la L_i-algèbre $(A, \phi \sqcup \mu)$).*

4.9. Propriétés diverses

Revenons au cas où L est un langage algébrique.

L'image directe d'une suralgèbre par un morphisme est une suralgèbre.

L'image de toute morphisme d'une algèbre dans un magma condensé est stable.

Pour tout quotientage f de $\mathbf{E}$ sur $\mathbf{F}$ et tout $B \subset F$ on a $B \in \mathrm{St}(\mathbf{F}) \Leftrightarrow f^*(B) \in \mathrm{St}(\mathbf{E})$.

Exercice facile. *Avec une seule sorte, trouver: deux magmas fondés à trois symboles et un seul élément, dont le produit n'est pas fondé; une algèbre fondée à deux symboles et deux éléments, dont le produit par elle-même n'est pas fondé; une algèbre fondée à un symbole à deux éléments ayant une partie non fondée.*

Proposition. *Tout produit non vide de magmas semi-libres est semi-libre.*

Preuve: soit $(\mathbf{E}_i)_{i\in I}$ une famille de magmas semi-libres $\mathbf{E}_i = (E_i, K_i)$ avec $I \neq \emptyset$, et $F = \prod_{i\in I} \mathbf{E}_i$. Soient $y \in F$ et $((s,u),y), ((s',u'),y) \in K'$. Pour tout $i \in I, ((s, \pi_i \circ u), pi_i(y)) \in K_i$ et $((s', \pi_i \circ u'), pi_i(y)) \in K_i$ or $\mathbf{E}_i$ est semi-libre donc $s = s'$ et $\pi_i \circ u = \pi_i \circ u'$. De $I \neq \emptyset$ et $(\forall i \in I, s = s')$ il résulte $s = s'$. Finalement $u' = \prod_{i\in I} \pi_i \circ u = u$. □

Proposition. *Pour tout L-magma $\mathbf{E}$ semi-libre, il y a équivalence entre ($\mathbf{E}$ est libre) et (la relation binaire R sur E définie par $(x,y) \mapsto (\exists z \in \Omega_L(E), x \in \mathrm{Im}'(z)$ et $(z,y) \in K)$ est bien-fondée).*

Preuve:

$$\begin{aligned}\forall F \subset E, \underline{\mathbf{E}} \subset F \text{ et } F \in \mathrm{St}(\mathbf{E}) &\Leftrightarrow (\forall y \in \underline{\mathbf{E}}, y \in F) \text{ et } (\forall (x,y) \in K, \mathrm{Im}'(x) \subset F \Rightarrow y \in F)\\ &\Leftrightarrow \forall y \in E, \overleftarrow{R}(y) \subset F \Rightarrow y \in F\end{aligned}$$ □

Proposition. *Soient $\mathbf{E}, \mathbf{F}$ deux magmas tels que $\mathbf{E}$ est semi-libre, $\mathbf{F}$ est libre et $\mathrm{Mor}(\mathbf{E},\mathbf{F}) \neq \emptyset$. Alors $\mathbf{E}$ est libre.*

Preuve: soient $f \in \mathrm{Mor}(\mathbf{E},\mathbf{F})$ et soient R et R' les relation binaires sur E et F de la proposition précédente. Alors on a $\forall x \in E, f[\overleftarrow{R}(x)] \subset \overleftarrow{R}'(f(x))$. Or R' est bien-fondée donc R aussi. □

Corollaire. *Soient $\mathbf{E}, \mathbf{F}$ deux magmas tels que $\mathbf{E}$ est semi-libre et $\mathbf{F}$ est libre. Alors $\mathbf{E} \times \mathbf{F}$ est libre.*

Proposition. *Le condensé d'un magma semi-libre est semi-libre.*

Preuve: soit $\mathbf{E} = (E,K)$ semi-libre et $\mathbf{F} = \mathbf{E}/S = (F,K')$ son condensé. Pour tout $t \in \Omega_L(F)$, notons $A = \{x \in \Omega_L(E) | \overleftarrow{S}_L(x) = t\}$ et $B = \{z \in E | \exists x \in A, (x,z) \in K\}$.

Soit S' la relation d'équivalence associée à $\overleftarrow{S} \times (y \mapsto (y \in B))$.

$$\begin{aligned}\forall (x,y),(x',y') \in K, \overleftarrow{S}'_L(x) = \overleftarrow{S}'_L(x') &\Rightarrow \overleftarrow{S}_L(x) = \overleftarrow{S}_L(x')\\ \Rightarrow ySy' \text{ et } (y \in B \Leftrightarrow x \in A &(\text{car } \mathbf{E} \text{ semi-libre}) \Leftrightarrow x' \in A \Leftrightarrow y' \in B)\\ &\Rightarrow yS'y'\end{aligned}$$

donc S' est une congruence. Donc $S' = S$. Finalement,

$$\forall (x,y) \in K, \forall (x',y') \in K, x \in A \Rightarrow y \in B \Rightarrow (\overleftarrow{S}(y) = \overleftarrow{S}(y') \Rightarrow y' \in B \Rightarrow x' \in A)$$

donc $\mathbf{F}$ est semi-libre. □

Lemme. *Soient $\mathbf{E} = (E,K), A, F \subset E$ tels que $\mathrm{Cl}(A) \subset F$. Alors, notant Cl' la clôture dans $E_{|F}$, on a $\mathrm{Cl}'(A) = \mathrm{Cl}(A)$.*

Lemme. *Soient $\mathbf{E}, \mathbf{F}$ deux magmas, A une partie génératrice de $\mathbf{E}$, $B \in \mathrm{St}(\mathbf{F})$ et $f \in \mathrm{Mor}(\mathbf{E},\mathbf{F})$ tels que $f[A] \subset B$. Alors $\mathrm{Im}\, f \subset B$.*

Preuve: $f^*(B)$ est stable et englobe A. Or A est génératrice donc $f^*(B) = E$. Donc $\mathrm{Im}\, f \subset B$. □

Lemme. *Soient $\mathbf{E}, \mathbf{F}$ deux magmas et $f \in \mathrm{Mor}(\mathbf{E},\mathbf{F})$ tels que $\mathbf{E}$ est fondé. Alors $\mathrm{Im}\, f \subset \mathrm{Cl}_F(f[\underline{\mathbf{E}}])$.*

Lemme. *Soient $\mathbf{E}$ minimal et $f \in \mathrm{Mor}(\mathbf{E},\mathbf{F})$. Alors $\mathrm{Im}\, f \subset \mathrm{Cl}_F(\emptyset)$. Si f est surjective alors $\mathbf{F}$ est minimal. En particulier le condensé d'un magma minimal est minimal.*

Proposition. *Le condensé d'un magma fondé est fondé.*

Preuve: soit $\mathbf{E} = (E,K)$ fondé et $\mathbf{F} = \mathbf{E}/S = (F,K')$ son condensé. On vérifie que $\overleftarrow{S}[\underline{\mathbf{E}}] = \underline{\mathbf{F}}$. Donc $\mathrm{Im}\, \overleftarrow{S} \subset \mathrm{Cl}_F(\overleftarrow{S}[\underline{\mathbf{E}}]) = \mathrm{Cl}'(\underline{\mathbf{F}})$. Or $\overleftarrow{S}$ est surjective donc $\underline{\mathbf{F}}$ est génératrice, i.e. $\mathbf{F}$ est fondé. □

Corollaire. *Le condensé d'un magma libre est libre.*

Proposition. *S'il existe un plongement de $\mathbf{E}$ dans $\mathbf{F}$ alors: si $\mathbf{F}$ est condensé, $\mathbf{E}$ aussi; si $\mathbf{F}$ est semi-libre, $\mathbf{E}$ aussi; si $\mathbf{F}$ est libre, $\mathbf{E}$ aussi.*

Proposition. *Tout coproduit, condensé ou non, de magmas semi-libres est semi-libre. Celui de magmas fondés est fondé. Celui de magmas minimaux est minimal. Celui de magmas libres est libre.*

4.10. Ecritures et termes

Soit L un langage algébrique, et V un τ-ensemble, appelé ensemble de variables, disjoint de L, et soit $L_V = L \cup V$ où les éléments de V seront utilisés comme des constantes.

On appellera L-écriture à variables dans V, tout L_V-magma libre et minimal. Ce sont les magmas de la forme $(E, {}^t\mathrm{Gr}\,\lambda)$ où $\lambda \in \Omega_{L_V}(E)^E_\tau$ et la relation binaire R sur E définie par $\overleftarrow{R}(x) = \mathrm{Im}'(\lambda(x))$ est bien-fondée. Une L-écriture sera appelée un terme ssi l'ordre engendré par R a un plus grand élément $m_{\mathbf{E}}$, appelé l'élément principal de ce terme.

Pour tout L-magma libre $\mathbf{E} = (E,K)$, et tout $v \in V_\tau^{\underline{\mathbf{E}}}$, $(E, K \cup {}^t\mathrm{Gr}\, v)$ est une L-écriture à variables dans V.

Remarque. *Tout terme est fini.*

En effet, si (E,λ) est un terme alors la relation R est bien-fondée et $\forall x\in E, \overleftarrow{R}(x)$ est fini. Par conséquent, $\overleftarrow{\langle R\rangle}(m_E)=E$ est fini.

Théorème et définition. *Pour toute L-écriture $\mathbf{E}=(E,{}^t\mathrm{Gr}\,\lambda)$, toute L-algèbre $\mathbf{A}=(A,\mathrm{Gr}\,\phi)$, on a d'une part $\forall\psi\in A_\tau^E, \psi\in\mathrm{Mor}(\mathbf{E},\mathbf{A})\Leftrightarrow\psi=\phi\circ\psi_L\circ\lambda$; d'autre part toute τ-application i de V dans A se prolonge de façon unique en un L-morphisme de $\mathbf{E}$ dans $\mathbf{A}$, qu'on appelle l'interprétation de E dans A et qu'on notera $\psi_{\mathbf{E},\mathbf{A},i}$.*

L'existence et l'unicité d'un tel ψ vient du fait que la formule $\psi=\phi\circ\psi_L\circ\lambda$ définit ψ par induction sur l'ensemble bien-fondé E. □

Proposition. *Soient $\mathbf{E}$ une L-écriture, $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ deux L-algèbres. Alors*

$$\forall f\in\mathrm{Mor}(\mathbf{A},\mathbf{B}),\forall i\in A^V, f\circ\psi_{\mathbf{E},\mathbf{A},i}=\psi_{\mathbf{E},\mathbf{B},f\circ i}.$$

Avant d'interrompre l'étude de l'algèbre universelle, que nous reprendrons dans le 6ème texte, annonçons simplement quelques résultats alléchants qui y seront montrés.

— Notant encore le langage mixte $L=L_0\cup L_1$ où L_0 contient les $\approx_\tau$. Vis-à-vis de tout système, toute condition algébrique où B' est fini, est d'une part traduisible en une condition relationnelle algébrique, d'autre part traduisible en l'objet suivant: un quadruplet $(V,\mathbf{E},H,H')$ où V est un τ-ensemble, $\mathbf{E}=(E,{}^t\mathrm{Gr}\,\lambda)$ est une L_1-écriture à variables dans V, $H,H'\subset\Omega_{L_0}(E)$ et H est fini; où l'on dit d'un système $\mathbf{A}=(A,K,\phi)$ qu'il le satisfait ssi

$$\forall i\in A_\tau^V,(\forall x\in H,(\psi_{\mathbf{E},\mathbf{A},i})_L(x)\in K)\Rightarrow(\forall x\in H',(\psi_{\mathbf{E},\mathbf{A},i})_L(x)\in K).$$

— Toute axiomatique algébrique "pure" est équivalente, vis-à-vis de toute algèbre (A,ϕ), d'une part à une axiomatique où chaque axiome est une paire de termes "supposés égaux" pour toute τ-application de V dans A; d'autre part, à une certaine M-théorie $T=(M,(\mathbf{M}_i)_{i\in I})$ suivant la définition que nous avons indiquée, avec une application de L dans M, et où la restriction à M de la structure de $\mathbf{M}_i$ en fait une T-algèbre; et une telle présentation est unique pour un I fixé.

4.11. Formules de la théorie des modèles

Nous venons de voir une première amorce d'un possible bouclage du cycle fondateur des mathématiques, par certaines notions de théories et de leurs objets, qui apparaissent conjointement désormais en tant qu'objets mathématiques de nos discours, à l'intérieur de l'univers des ensembles, et non plus en tant que ce par quoi nous nous exprimons. Certes il reste encore du travail à faire à partir de ces premières notions de théories d'ici à rejoindre enfin et mettre en perspective la théorie des ensembles telle qu'effectivement nous l'avons pratiquée depuis le départ.

Mais avant d'avancer dans cette voie, remarquons déjà une non-différence qui n'est que le seul effet de la différence de perspective entre le fait de s'exprimer par un formalisme et le fait de le regarder comme objet: l'univers dont traite une théorie apparaît désormais comme un système, i.e. un ensemble muni de structures, et non plus une classe; de plus, cet univers (ce système) est désormais variable, et le domaine de cette variable est une classe, celle de tous les systèmes de type défini par le langage de la théorie et satisfaisant les axiomes de celle-ci.

Une autre différence serait que les objets de la théorie, valeurs possibles des variables, ne sont plus que de purs éléments, et non plus éventuellement des ensembles ou des applications. Or, ce n'est là encore qu'un effet de perspective (les symboles de relations et d'opérations permettant aux éléments de jouer les rôles d'ensembles et d'applications).

Voici l'étape que nous allons maintenant effectuer: le passage de l'algèbre universelle à la théorie des modèles (aussi appelée pour sa partie syntaxique *logique du premier ordre*), qui consiste à généraliser le type d'axiome autorisé, de la manière suivante:

En algèbre universelle, tout axiome avait (version "pure") la forme d'un seul symbole d'égalité ou autre relation appliqué à des termes, ou encore (version "générale") une implication d'une chaîne de telles expressions reliées par des "et", vers une autre telle expression ou chaîne d'expressions, le tout étant implicitement sous quantificateurs universels pour toutes les variables.

En théorie des modèles, par contre, on admet des énoncés formés par toutes combinaisons de ces expressions par des connecteurs et quantificateurs existentiels et universels. Dans ce qui suit, nous appellerons "formule" un tel énoncé, en tant qu'objet de la théorie des modèles. Cependant, notons une différence entre ces quantificateurs et ceux de la théorie des ensembles: un quantificateur ne sera plus rapporté à un ensemble objet de la théorie (et exprimable par un terme), mais seulement à la sorte de sa variable. On définit ainsi la formule de surjectivité d'un symbole f d'application, comme étant "$\forall y, \exists x, f(x) = y$", sans indication d'ensemble d'arrivée.

Voici comment s'intègrent les connecteurs dans le formalisme que nous avons développé pour les théories algébriques: à l'ensemble des sortes on ajoute une sorte supplémentaire Bool (des valeurs de vérité); on ajoute au langage les connecteurs utiles (dont la constante "vrai"); on réinterprète les symboles de relations comme symboles d'opérations de sorte Bool, rendant ainsi le langage purement algébrique. Puis on s'intéresse en particulier aux systèmes dans lesquels la partie de sorte Bool est $\mathcal{V} = \{\text{vrai, faux}\}$.

D'autre part, si on veut formaliser la notion de formule avec quantificateurs, la subtilité vient du fait que différentes parties d'une même formule n'ont pas le même ensemble de variables. Pour s'en sortir, on peut définir la notion de formule comme variante de la notion de L-théorie où L est le langage qu'on vient obtenir par le procédé ci-dessus, et où au lieu de supposer que chaque magma $\mathbf{M}_i$ est minimal, on le suppose libre, tandis que les quantificateurs sont introduits pour relier les M_i entre eux et ainsi obtenir la propriété de minimalité globalement dans M, au lieu d'être une propriété de chaque $\mathbf{M}_i$ pris séparément. De cette manière, on a là encore un morphisme de chaque $\mathbf{M}_i$ vers la L_i-algèbre $(A, \phi \sqcup \mu))$, mais il reste encore à définir l'interprétation des quantificateurs; on se contentera de savoir que cette règle peut s'énoncer de manière ad hoc par induction.

Enfin, le rôle d'axiome effectif attribué à une formule close, i.e. sans variable libre (son élément principal est booléen dans $M_\emptyset$), se fait en posant dans $K_\emptyset$ le symbole "vrai" sur cet élément principal, ce qui constitue le seul aspect de non-liberté de celle-ci. On peut aussi le faire sur une formule avec variables libres, posant donc le symbole vrai dans un autre K_i, ce qui est une manière implicite de clore la formule en interprétant ses variables libres comme étant sous quantificateurs universels.

Définition. *En théorie des modèles, on appelle théorie tout triplet $T = (X, L, A)$ où X est un ensemble qui servira d'ensemble des sortes, L est un langage mixte dont les sortes sont dans X, et A est un ensemble de formules, constituées comme ci-dessus au moyen de $X \cup \{Bool\}$ (où Bool $\notin X$) et de $L \cup \{\approx_c |c \in X\}$, et appelées les axiomes de T. On appelle modèle d'une telle théorie, tout L-système $\mathbf{M}$ tel que toute formule $F \in A$ est satisfaite au sens ci-dessus par l'algèbre $\mathbf{M} \cup \mathcal{V}$ où les $\approx_c$ sont interprétés par la relation d'égalité.*

Parmi les innombrables exemples de telles théories se trouvent:
— Diverses variantes de théories des ensembles
— L'arithmétique de Peano (théorie des nombres entiers)
— Diverses géométries, par exemple la géométrie euclidienne.

4.12. Vérités, démonstrations et contradictions

Une fois posée une théorie, on cherche ses théorèmes, conséquences de ses axiomes. Ce sont des énoncés vrais dans tout modèle de la théorie. Dans cette section, nous supposerons fixés un ensemble de sortes X et un langage L.

On reconnaît une correspondance de Galois entre les ensembles d'énoncés et les ensembles de systèmes: d'un ensemble de formules on s'interroge sur la classe des systèmes qui satisfont tous ces énoncés, puis de cette classe on s'interroge sur la classe des formules satisfaites sur tous ces systèmes. Il y a seulement une différence : on avait défini les correspondances de Galois entre des ensembles, celle-ci se définit entre classes. Alors, peut-on encore donner un sens à cela ? Sans prétendre faire un travail rigoureux à ce stade, inspirons-nous des notions développées autour des correspondances de Galois pour guider la réflexion.

Le fait que les modèles forment une classe et non un ensemble, n'est pas nécessairement un problème, vis-à-vis de l'objectif principal de cette étude qui est de s'interroger sur le pouvoir des formalismes à appréhender les théories. En effet, de toute façon, dès que les systèmes sont infinis, ils nous sont inaccessibles, à l'existence abstraite quelque part dans le monde fictif des mathématiques, de sorte que la nature exacte de leur variabilité, ensemble ou classe, ne nous concerne plus. Ce qui nous intéresse, c'est ce qu'on peut en dire par des moyens finis, à savoir quelles sont les autres formules qu'ils satisfont. C'est donc de décrire la clôture définie par cette correspondance dans l'ensemble des formules. Sauf que pour l'instant, nous n'avons là encore vu qu'une classe des formules et non pas un ensemble des formules. Ultérieurement, nous verrons comment présenter les choses en termes d'un ensemble de toutes les formules. Pour cela, il faudra d'abord postuler l'axiome de l'infini (en effet, l'ensemble de toutes les formules sera lui-même le plus souvent un ensemble infini).

La question est donc: est-il possible de définir cette clôture et d'en étudier les propriétés, en dépit du fait que l'autre terme de la correspondance, sur laquelle s'appuie sa définition, nous est a priori inaccessible ?

Nous pouvons déjà répondre à la question semblable sur les théories relationnelles algébriques: nous avons montré que les conditions conséquences (vérités) d'une axiomatique A sont les (B, H, H') tels que $H' \subset \mathrm{Cl}_{A,B}(H)$. Epurons cette notion: ce que nous avons ici appelé une conséquence n'est en fait que le traitement collectif d'un ensemble de conséquences. Les conséquences vraiment individuelles sont les éléments de $\mathrm{Cl}_{A,B}(H)$. Or, on sait (voir le dernier théorème de 3.7) que les éléments de $\mathrm{Cl}_{A,B}(H)$ sont ceux qui sont appartiennent à une certaine partie finie F de $\Omega_L(B)$ ayant une certaine propriété, du fait que tous les axiomes de A sont de base finie. Cette partie F peut donc être appelée une démonstration de l'appartenance d'une ses éléments (ou de tous les éléments) à $\mathrm{Cl}_{A,B}(H)$. Plus précisément, comme on montrera ultérieurement, les éléments de F peuvent se ranger dans un ordre total, chacun étant conséquence de certains (en nombre fini) de ceux qui le précèdent ou qui appartiennent à l'ensemble H des "hypothèses" suivant l'un des axiomes. Ainsi se trouve définie la clôture sans référence à la classe des modèles de la théorie.

Alors se pose la question de savoir si on peut en faire autant en théorie des modèles: existe-t-il une règle générale de démonstration qui permette de déduire toute conséquence de toute théorie $T = (X, L, A)$ donnée ? Autrement dit, peut-on énoncer une fois pour toutes une certaine théorie $T_D = (X_D, L_D, A_D)$ où X_D, L_D, A_D sont finis, dite théorie des démonstrations, ayant entre autres les sortes nommées "sortes", "symboles", "axiomes" et "conclusion", dans un modèle fini de laquelle "conclusion" serait une formule, "axiomes" serait un ensemble indexant une famille de formules, et telle que, pour toute théorie T et toute formule C on aurait : (C est une vérité de T) $\Leftrightarrow$ (il existe un modèle fini de T_D ayant pour "sortes", "symboles", "axiomes" des parties finies de T, et de conclusion C) ?

La réponse est oui, et c'est ce qu'on appelle le *théorème de complétude* de la logique du premier ordre. Mais l'explicitation de T_D et la preuve de ce théorème ne sont pas à la portée du présent chapitre. De plus, l'axiome de l'infini est indispensable à cela. (Il est cependant possible de le faire dans un cadre plus faible que la théorie des ensembles avec axiome de l'infini, en particulier l'arithmétique de Peano, suivant la méthode de Gödel, mais c'est très compliqué; par son schéma de récurrence, l'arithmétique de Peano est en fait déjà plus forte que la théorie des ensembles telle que nous l'avons présentée sans l'axiome de l'infini).

Ce concept de théorie des démonstrations peut se simplifier un peu, par l'élimination du paramètre C remplacé par faux tandis que $(\mathrm{non}\, C)$ s'ajoute aux hypothèses. En effet, par exemple l'énoncé $((A \text{ et } B) \Rightarrow C)$ équivaut à $((A \text{ et } B \text{ et non}\, C) \Rightarrow \text{faux})$, de sorte qu'il revient au même de démontrer l'un ou l'autre. Une preuve du second est ce qu'on appelle une preuve par l'absurde du premier. Soit donc T'_D la "théorie des contradictions", faite de T_D avec la formule "faux" au titre de la conclusion. A son sujet, le théorème de complétude s'énonce : (Il n'existe pas de modèle de T) $\Leftrightarrow$ (il existe un modèle fini de T'_D basé sur une partie finie de T).

Pseudo-définition. *Pour toute théorie T, une formule C sera appelée vérité de T ssi C est satisfait par tout modèle de T; d'après le théorème de complétude, cela équivaut à l'existence d'un modèle fini de T_D basé sur une partie finie de T et de conclusion C.*

Pseudo-définition. *Etant donnée une théorie T et une formule C, on dit que C est un théorème de T lorsqu'on a trouvé un modèle fini de T_D basé sur une partie finie de T et de conclusion C.*

La clôture dans l'ensemble F des formules pour tous X et L fixés, qui à toute axiomatique associe l'ensemble de ses vérités, est une clôture finitaire, engendrée par l'ensemble K des couples (A', C) où A' est une partie finie de F et $C \in F$, tels qu'il existe un modèle fini de T_D d'axiomatique A' et de conclusion C.

Mais tant qu'on n'a pas postulé pas encore postulé l'axiome de l'infini, K n'est pas un ensemble, et ce n'est même pas une classe, puisqu'il est défini par un énoncé d'existence d'un objet dans une classe, ce qui n'a pas de sens. Posons alors:

Pseudo-définition. *Le pseudo-machin K ci-dessus sera appelé loi de la dynamique des démonstrations, avec quoi nous appellerons dynamique des démonstrations le fait de "pouvoir passer d'une théorie $T = (X, L, A)$ à une théorie $T' = (X, L, B)$" où $B = A \cup \{C\}$, dès qu'il existe $A' \subset A$ tel que $(A', C) \in K$, autrement dit dès que C est un théorème de T.*

Ainsi T et T' ont les mêmes modèles et les mêmes vérités, de sorte qu'on peut les voir comme étant des versions successives de “la même théorie”, la version T' étant dite ultérieure à T, ou encore “plus développée” que celle-ci.

Avec l'axiome de l'infini qui fait de K un ensemble, la classe des vérités d'une théorie $T = (X, L, A)$ est le plus petit point fixe plus grand que A, de la dynamique des démonstrations de sortes X et de langage L.

4.13. La dynamique des théories

La dynamique des démonstrations que nous venons d'exposer, est un cas particulier d'une dynamique plus générale par laquelle se développent les théories.

$$\begin{tikzcd}
\text{Dynamique} & \text{Fondement} & \text{Réalité} \\
\text{Constantes} \arrow[r] & \text{sortes} \arrow[r] & \text{(G-ensembles ?)} \arrow[dll] \\
\text{Constructions} \arrow[r] & \text{Langage} \arrow[r] & \text{Invariants} \arrow[dll] \\
\text{Définitions} \arrow[r] & \text{Axiomes} \arrow[r] & \text{Vérités} \arrow[dll] \\
\text{Démonstrations} \arrow[r] & \cancel{\text{Contradictions}} &
\end{tikzcd}$$

Le “fondement” d'une théorie est son contenu $T = (X, L, A)$ à un instant donné, qui la définit.

Sa “réalité” est la clôture de ce fondement, la totalité de ce qui est essentiellement signifié par la théorie, qui prolonge les parties déjà présentées (son fondement) par celles qui ne le sont pas encore (son contenu potentiel, sous-jacent à ce que permet son fondement).

Ainsi, un fondement d'une théorie est un échantillon de sa réalité, qui suffit à engendrer celle-ci. La dynamique est le procédé d'enrichissement d'une théorie par l'ajout à son fondement, d'objets supplémentaires qui étaient déjà implicitement signifiés par celui-ci, de manière à demeurer “au fond dans la même théorie”, mais présentée sous forme d'un fondement plus développé que le fondement initial.

On formalisera cette procédure par l'énoncé de certaines *lois de la dynamique des théories*, qui seront certains types d'objets de la forme (X, L, A, X', L', A') où X, L, A, X', L', A' sont finis, et où (X, L, A) et $(X \cup X', L \cup L', A \cup A')$ soient deux théories “équivalentes”. A partir de là, un développement d'une théorie T suivant (X, L, A, X', L', A'), consistera à d'abord désigner un morphisme de (X, L, A) dans $T = (X'', L'', A'')$, c'est-à-dire une application ϕ_1 de X dans X”, une application de ϕ_2 de L dans L” munie d'une bijection de chaque V_s sur $V_{\phi_2(s)}$ en accord avec ϕ_1, et une application ϕ_3 de A dans A” compatible avec tout cela, de sorte qu'en tout modèle de T on puisse voir un modèle de (X, L, A). Puis à introduire la théorie T' “équivalente à T” faite de T auquel on ajoute les constituants obtenus en transportant X', L', A' par ce morphisme. (Dans la plupart des cas, ϕ_1, ϕ_2 et ϕ_3 pourront être pris injectifs, le quotient d'une loi (X, L, A, X', L', A') par quotientage de X ou de L figurant lui-même comme occurence de la même loi; et même si ce n'est pas le cas, cela revient toujours au même, il suffit d'épaissir T en lui mettant de multiples copies interchangeables de certains de ses constituants, rendant la question même de l'injectivité vide de sens...).

Par leur usage, ces nouveaux constituants peuvent être vus comme une forme d'abbréviation de certaines combinaisons particulières d'usages des constituants de la théorie initiale. On appellera *simulation* d'une loi de la dynamique, une manière de reformuler dans les termes de l'ancienne version d'une théorie ce qu'il est possible d'exprimer (notamment les formules) dans la nouvelle version obtenue par développement de la première suivant cette loi. Ainsi, lorsqu'une théorie T' est conforme à ce qui serait obtenu par développement d'une certaine théorie T suivant une loi, tout ce qu'on peut exprimer avec T' peut se reformuler par simulation en termes de T.

Dans le tableau ci-dessus, nous avons mis, en la barrant, la notion de contradiction dans la colonne du fondement d'une théorie. On pourrait en effet considérer une théorie contradictoire, dont la présentation serait agrémentée par l'explicitation d'une contradiction interne à cette théorie. Une telle théorie étant manifestement sans objet intéressant, on ne s'intéressera en pratique qu'aux théories dont la quatrième liste, celle des contradictions, demeure vide. Cependant, il y a encore un sens de reconnaître une telle quatrième liste même vide, dans la mesure où le principe général de développement des théories serait étendu à la possibilité de découvrir et ajouter à la présentation d'une théorie, une contradiction qui n'était pas connue au départ.

Dans les sections suivantes, nous allons progressivement remonter l'hélice en imitant dans les niveaux supérieurs les rapports entre dynamique, fondement et réalité que nous venons d'examiner dans le plus bas niveau (entre axiomes, vérités, démonstrations et contradictions). Tandis que la colonne des fondements se construisait de haut en bas, chaque niveau étant construit au moyen des niveaux supérieurs, les autres colonnes se construisent de bas en haut. Ainsi la dynamique des démonstrations fait appraître des vérités pour les ajouter aux axiomes avec d'éventuelles contradictions; celle des définitions fait apparaître des invariants pour les ajouter comme symboles liés aux précédents par des axiomes, et celle des constructions fait apparaître des G-ensembles pour les ajouter aux sortes, les liant aux précédentes par des symboles et des axiomes.

Contrairement à la dynamique des démonstrations dont nous avons admis l'existence comme une grosse boîte noire, nous allons exposer explicitement d'autres lois de la dynamique des théories auxquelles nous nous intéresserons.

4.14. Définitions

Il y aurait plusieurs manières possibles de décomposer la dynamique des définitions en une liste de lois. Voici un exemple d'expression de la dynamique des définitions, comme composée de trois lois (dont la première serait d'ailleurs superflue, étant équivalente à une application successive des deux suivantes), qui sont donc de la forme $(X, L, A, \emptyset, L', A')$, comme expliqué précédemment:

Loi de définition par un terme. *Soit X quelconque, L un langage algébrique à sortes dans X, $A = \emptyset$; on se donne un ensemble fini V de variables à sortes dans X, et t un terme à variables dans V. Alors on prend $L' = \{$"f"$\}$ où "f" $\notin L$ est un symbole d'opération d'arité V et de même sorte que m_t, et A' constitué de l'axiome "$f = t$" (sous-entendant les $\forall$ sur chaque variable de V).*

Par exemple on a la définition du symbole Id_c sur chaque sorte c: on prend X singleton, $L = \emptyset$, V singleton, t le terme trivial fait de l'élément de V,

Loi de définition par une formule. *Soit X quelconque, L un langage mixte à sortes dans X, $A = \emptyset$; on se donne un ensemble fini V de variables à sortes dans X, et une formule F de langage L à variables libres dans V. Alors on prend L' constitué d'un seul symbole "R'' $\notin L$ de relation d'arité V, et $A' = \{$"$R \Leftrightarrow F$"$\}$.*

Toute formule faisant appel au nouveau symbole d'opération f (resp. de relation R) peut se "simuler" par la formule équivalente obtenue en remplaçant chaque occurence du symbole f (resp. R) par le terme (resp. la formule) qui le définit, appliqué aux mêmes termes.

Les choses se passent ici suivant le même schéma qu'elles se passaient au niveau inférieur: démonstration et contradiction se ressemblent, sauf qu'une démonstration fournit un nouvel axiome, qui dans une contradiction disparaît remplacé par la formule triviale "faux". Ainsi une définition ressemble à un axiome, i.e. c'est la donnée d'une formule, et, par les variables libres dont elle dépend, elle fournit un nouveau symbole; faute de variable libre ce symbole devient trivial et la formule prend une forme d'axiome.

Loi de définition d'une opération par son graphe. *Soit X quelconque, V un ensemble fini de variables à sortes dans X, $w \notin V$ et $V' = V \cup \{w\}$. Soit L formé d'un seul symbole de relation "R" d'arité V'. Figurant v comme étant en première position dans les variables de "R", posons $A = \{$"$\forall\bullet, \exists! w, R(w, \bullet)$"$\}$ où $\bullet$ est l'abbréviation de la liste "$x_1, \cdots, x_k$" des variables dans V. Enfin on pose $L' = \{f\}$ où f est un symbole d'opération de même sorte que w et d'arité V, et A' fait d'un axiome qui peut s'énoncer "$\forall\bullet, \forall w, R \Leftrightarrow (f = w)$", ou de manière équivalente "$\forall\bullet, R(f(\bullet), \bullet)$".*

On remarque que la dernière formule a aussi la forme d'une définition de R au moyen de f, et de laquelle résulte la formule de A comme théorème.

Le symbole f peut se simuler à partir du symbole R de la manière suivante.

Pour chaque ensemble V de variables et chaque formule F à variables dans V, on opère successivement une simulation de chaque occurence de f qu'elle comporte. Prenons-en une, et exprimons F sous la forme $F(\bullet) \Leftrightarrow F_1(f(g(\bullet)), \bullet)$ où $g(\bullet)$ désigne une famille indexée par V_f de termes à variables dans V. Introduisons une variable supplémentaire z de même sorte que f. On a alors

$$\forall\bullet, F(\bullet) \Leftrightarrow \exists z, R(z, g(\bullet)) \text{ et } F_1(z, \bullet).$$

On remarque que f apparaît une fois de moins dans la dernière expression de F que dans son expression initiale. Ainsi, chaque formule étant finie, et ne comportant donc qu'un ensemble fini J d'occurences de f, en répétant cette procédure pour chaque élément de J, on aboutit finalement à une expression équivalente ne comportant plus f. A savoir, une formule faite d'une succession de $(\exists x_j)$ pour chaque $j \in J$, appliquée à une succession de "et" entre la formule principale et un certain $R(x_j, t_j)$ pour chaque $j \in J$.

De cette manière, l'opérateur conditionnel (application d'un couple à la valeur d'une formule) est simulable en théorie des modèles, puisqu'il est définissable par son graphe:

$$z = (x, y)(R(t)) \Leftrightarrow (z \neq y \Rightarrow R(t) \Rightarrow z = x).$$

Remarque: Lorsqu'on effectue successivement plusieurs définitions, toute définition par une formule utilisant des symboles introduits dans des définitions précédentes, peut se reformuler directement comme définition par une formule indépendante de ceux-ci, grâce à la possibilité d'utiliser des formules aussi longues qu'on veut.

Si on remplaçait cette loi de définition par une liste de lois de définitions plus élémentaires n'utilisant pas de formules arbitraires, une définition par une formule ne serait traduisible que comme étape finale d'une succession de définitions aussi longue qu'était longue cette formule.

4.15. La dynamique des modèles

Continuons à explorer l'hélice de la dynamique des théories: tout comme la notion de vérité constituait la réalité explorée par la dynamique des démonstrations (la propriété que doivent respecter les axiomes produits au niveau de la signification des théories, à savoir la classe de leurs modèles), de même nous allons chercher à préciser la réalité qu'explore la dynamique des définitions: quelle est, dans la classe des modèles d'une théorie, la propriété remarquable des opérations et relations obtenues au moyen des définitions ? La notion de vérité était définie comme appartenance à la clôture de l'axiomatique dans la correspondance de Galois définie par une relation entre la classe des formules et celle des systèmes. A quoi donc peut-on relier la classe des symboles pour définir une correspondance de Galois dont la clôture est explorée par les définitions ?

Notons que ce n'est pas en fait la classe des symboles qui doit être reliée à quelque chose, puisque contrairement à un axiome, un symbole n'a généralement pas une seule interprétation, mais de multiples symboles de même type peuvent coexister pour désigner des structures différentes dans les mêmes modèles; et dans une définition, l'ajout de l'axiome qui définit le sens du nouveau symbole est indispensable, justement pour préciser la structure qu'il désignera. Il faut donc considérer les symboles en tant que munis de leur interprétation dans la classe des modèles d'une théorie: les structures qu'ils définissent dessus. Et là, il y a déjà un problème: cela a bien un sens de parler, comme d'un objet, de l'interprétation d'un symbole dans un modèle (c'est une opération ou une relation dedans), mais non de son interprétation dans la classe de tous les modèles, celle-ci n'étant généralement pas un ensemble. Malgré cela, cherchons vaillamment quelles propriétés sont satisfaites par les structures désignées par chaque symbole fruit de définition, dès qu'elles sont satisfaites par toutes celles de la théorie initiale, mais ne le seraient pas par de quelconques autres structures qui pourraient y être ajoutées arbitrairement.

La réponse à cette devinette pourrait être parachutée sans transition. Mais nous allons maintenant voir par quelle tour de magie il est possible de la "déduire logiquement". Voici:

Chaque correspondances de Galois relie ses deux ensembles de façon symétrique, et avec en quelque sorte un renversement de l'un à l'autre. Ainsi la colonne des fondements de notre hélice des théories est-elle reliée par correspondance de Galois, à la colonne des fondements d'une hélice duale, qu'on appellera hélice des modèles, dont la progression verticale est renversée. Nous n'allons pas ici l'expliquer entièrement, seulement en donner un aperçu. La voici figurée encore comme progressant de haut en bas, mais c'est son haut qui est reliée au bas de la précédente

Dynamique	Fondement	Réalité
	Systèmes $\longrightarrow$	Modèles
transport de structure $\longleftarrow$ $\longrightarrow$	des isomorphismes $\longrightarrow$	les isomorphismes
Composition $\longleftarrow$ $\longrightarrow$	Equations... $\longrightarrow$	

Nous avions donc une correspondance de Galois entre systèmes et axiomes. La clôture d'un ensemble de systèmes est la classe des modèles de la théorie ayant pour axiomatique l'ensemble des vérités comunes à ces systèmes. Continuant à descendre l'hélice en passant par la dynamique : quelles sont alors les opérations qui permettent d'engendrer de nouveaux systèmes satisfaisant toutes les vérités communes à un ensemble de systèmes donnés ?

En ce qui concerne les théories algébriques précédemment évoquées, il y avait déjà la structure induite sur une partie, ainsi que le produit d'une famille de systèmes. D'autres opérations de coproduit ou quotientage peuvent encore y être ajoutées, mais seulement au moyen d'un quotientage qui force le résultat à satisfaire les axiomes, ce qui n'est donc pas à proprement parler une manière de produire naturellement un nouveau système satisfaisant les mêmes formules que ceux de départ.

En théorie des modèles, par contre, il y a beaucoup moins de possibilités de mouvements entre modèles préservant leurs vérités. Nous nous contenterons du plus simple de ces mouvements, que nous avons déjà présenté, et qui malgré le ridicule de l'apparente trivialité qui le couvrait dans le cadre des théories algébriques, prend ici toute l'importance que lui donne l'élimination de ses principaux concurrents: le transport de structure par une bijection f d'un système $\mathbf{M}$ vers un ensemble M', donnant à celui-ci l'unique structure faisant de f un isomorphisme. En effet, si deux systèmes sont isomorphes, alors toute formule vraie dans l'un est également vraie dans l'autre. Et nous allons voir que dans la classe des systèmes finis, l'isomorphisme est la seule dynamique possible. Précisément:

Théorème. *Soit une famille finie $(\mathbf{M}_i)_{i\in I}$ de systèmes finis et un système fini $\mathbf{M}'$ satisfaisant toute formule que satisfont tous les $\mathbf{M}_i$. Alors il existe $i \in I$ tel que $\mathbf{M}'$ est isomorphe à $\mathbf{M}_i$.*

La preuve sera présentée dans la section suivante. On peut voir cela comme un analogue du théorème de complétude, mais restreint aux systèmes finis. Il n'y a par contre pas de généralisation possible à la dynamique reliant les systèmes infinis. Pour les curieux: d'autres opérations entre systèmes, n'apportant donc quelque chose de plus que pour les systèmes infinis ou les opérations entre une infinité de systèmes, se trouvent sur en.wikipedia.org, articles Elementary embedding (cas spécial de plongement, le mot “embedding” étant la traduction en anglais de “plongement” dans le vocabulaire mathématique) et Ultraproduct.

Pour continuer le parcours de l'hélice de la dynamique au fondement, il suffit de neutraliser le pouvoir générateur de celle-ci: au lieu de transporter une structure pour faire un nouveau système, on ne considère que des isomorphismes entre systèmes déjà introduits. On peut encore le neutraliser encore plus en considérant les automorphismes d'un système.

Il peut sembler superficiellement étrange qu'un même nom figure dans les colonnes fondement et réalité de la deuxième ligne, remplaçant seulement “des” par “les”. En fait, cela est parfaitement semblable à tout ce qui précède, la seule différence étant une affaire de point de vue: nous avions d'abord introduit arbitrairement une théorie en descendant la colonne de ses fondements hors de toute autre considération; puis nous prétendons introduire l'hélice des modèles, non comme une donnée indépendante, mais comme exprimée dans les termes de la théorie. Or, ce traitement est ce qui rompt la symétrie du problème. En fait, on peut présenter l'hélice des modèles de façon parfaitement semblable à celle des théories, et même, d'autant plus semblable qu'elle n'est finalement rien d'autre qu'un cas très particulier de celle-ci. A savoir, le cas d'une théorie algébrique pure dont le langage ne comporte que des symboles d'applications (une telle théorie s'appelle une présentation de catégorie, comme nous expliquerons dans un texte ultérieur) et où, de plus, chaque symbole a un inverse (i.e. chaque symbole s est lié à un certain symbole s' dont le couple de sortes est le transposé de celui de s, par les axiomes algébriques $s \circ s' = \mathrm{Id}, s' \circ s = \mathrm{Id}$, de sorte que ce s' est appelé l'inverse de s).

Alors, le fait qu'on mette le même nom avec un pronom différent dans les colonnes fondement et réalité, vient du fait que, dans la correspondance de Galois $(\perp, \top)$ entre deux ensembles $\mathcal{P}(X)$ et $\mathcal{P}(Y)$ associée à une relation R entre X et Y, on peut soit considérer au départ une partie $A \subset X$ puis définir $B' = \perp(A)$ et $A' = \mathrm{Cl}(A) = \top(B')$; soit partir d'un $B \subset Y$ quelconque pour définir $A' = \top(B)$, et choisir arbitrairement un certain $A \subset A'$ en espérant que $A' = \mathrm{Cl}(A)$. Ainsi, au lieu de présenter comme arbitraire le choix d'une axiomatique, on aurait pu présenter les choses en disant qu'on imagine donné un certain système, ou un ensemble ou une classe de systèmes, pour ensuite introduire les axiomes comme étant “des vérités”, i.e. une liste non-exhaustive de formules qui soient satisfaites par ces systèmes-là, en espérant que les autres vérités en résultent. C'est le point de vue réaliste sur le choix d'une théorie.

4.16. Invariants

Nous pouvons enfin définir la correspondance de Galois entre la classe des ensembles du milieu de la colonne des fondements d'une hélice et celle de l'autre, et qui par ses deux clôtures plonge chacun de ces deux ensembles dans la réalité qu'il présente. Et conformément à ce que nous avons annoncé, cette correspondance de Galois doit avoir la particularité d'être tout ce qu'il y a de plus symétrique dans cette histoire, avec pour seule différence qu'un des deux espaces est “plus gros” que l'autre.

Soit donc d'une part X un ensemble de sortes, d'autre part Y un ensemble de systèmes. Ou plutôt, pour rendre symétrique la présentation, deux ensembles X et Y avec une famille H indexée par $X \times Y$, supposés tous deux à deux disjoints. On peut donc voir H comme un ensemble muni de deux applications $\tau \in X^H$ et $\tau' \in Y^H$, et la famille en question pourra se noter $x, y \mapsto H|_x^y$. Fixant x et laissant y variable on a un τ'-ensemble $H|_x = \tau^\bullet(x)$; fixant y et laissant x variable on a un τ-ensemble $H|^y = \tau'^\bullet(y)$.

Soit G l'ensemble des (y, y', f) où $y, y' \in Y$ et f est une τ-application bijective de $H|^y$ dans $H|^{y'}$, ce qu'on peut aussi voir comme famille indexée par X de bijections f_x de $H|_x^y$ dans $H|_x^{y'}$.

Soit $\mathcal{S}$ la classe des (s, T) où s est un symbole d'opération à sortes dans X, et $T = (T_y)_{y\in Y}$ où T_y est une interprétation de s dans $H|^y$, i.e. une application de $(H|^y)_\tau^{V_s}$ dans $H|^y_{\tau(s)}$

Alors on définit l'orthogonalité entre (s, T) dans $\mathcal{S}$ et $(y, y', f) \in G$ par l'énoncé

$$(s, T)\perp(y, y', f) \Leftrightarrow f \circ T_y = T_{y'} \circ f_{\{s\}} \in (H|^{y'}_{\tau(s)})^{\prod_{a\in V_s} H|^y_{\tau(a)}}$$

De même pour les symboles de relations, avec la classe $\mathcal{S}'$ des (s, R) où s est un symbole de relation à sortes dans X, et $R = (R_y)_{y\in Y}$ où R_y est une interprétation de s dans $H|^y$, i.e. une partie de $(H|^y)_\tau^{V_s}$:

$$(s, R)\perp(y, y', f) \Leftrightarrow R_y = f^*_{\{s\}}(R_{y'}) \Leftrightarrow R_{y'} = f_{\{s\}}[R_y].$$

On remarque que ces énoncés demeurent bien définis même si X et Y deviennent des classes, du moment qu'on dispose d'une définition de T_y et de R_y en termes de y ainsi qu'une définition de f_x en termes de x.

Définition. *Soient X et Y deux ensembles, H un ensemble muni de $\tau \in X^H$ et $\tau' \in Y^H$, et $F \subset G$ où G est défini ci-dessus. On appelle F-invariant, tout élément de $\mathcal{S}$ ou de $\mathcal{S}'$ orthogonal à tout élément de F.*

On remarque que tout élément de $\mathcal{S}$ invariant a pour graphe un élément de $\mathcal{S}'$ invariant. Ceci permet de simplifier la recherche des invariants en la menant uniquement dans $\mathcal{S}'$.

Dans ces termes, on traduit la notion d'isomorphisme de la manière suivante: étant donné un langage mixte $L = L_0 \cup L_1$ à sortes dans X, toute famille de L-systèmes $(\mathbf{M}_y)_{y\in Y}$, $\mathbf{M}_y = (M_y, K_y, \phi_y)$, se traduit d'abord par un ensemble $H = \coprod_{y\in Y} M_y$, puis $(\phi_y)_{y\in Y}$ définit une application ψ de L_1 dans $\mathcal{S}$, et $(K_y)_{y\in Y}$ définit une application ψ' de L_0 dans $\mathcal{S}'$. Un isomorphisme d'un $\mathbf{M}_y$ vers un $\mathbf{M}_{y'}$ est alors assimilable à un élément de G à la fois orthogonal à $\operatorname{Im}\psi$ et à $\operatorname{Im}\psi'$ (i.e. orthogonal à tous les éléments de $\operatorname{Im}\psi$ et de $\operatorname{Im}\psi'$).

Soit F l'ensemble de tous les isomorphismes entre deux quelconques des systèmes $\mathbf{M}_i$, i.e. l'intersection des orthogonaux de $\operatorname{Im}\psi$ et de $\operatorname{Im}\psi'$. Les F-invariants sont appelés les invariants de la famille $(\mathbf{M}_y)_{y\in Y}$. Pour tout τ-ensemble V, on définit au moyen de F une relation d'équivalence $\sim$ sur $U_V = \coprod_{y\in Y}(H|^y)^V_\tau$ par $(y, u) \sim (y, u') \Leftrightarrow \exists f, (y, y', f) \in F$ et $u' = f \circ u$. La réflexivité vient du fait que les Id_{M_y} sont des automorphismes; la symétrie, de la stabilité de F par inversion; la transitivité, de sa stabilité par composition. Soit $W_V = U_V/\sim$, et π_V la surjection canonique de U_V dans W_V. Alors la condition pour qu'un $(s, R) \in \mathcal{S}'$ soit un F-invariant se traduit par

$$\forall (y, x), (y', x') \in U_s, (y, x) \sim (y', x') \Rightarrow (x \in R_y \Leftrightarrow x' \in R_{y'})$$

autrement dit $\coprod_{y\in Y} R_y$ est de la forme $\pi_V^*(B)$ où $B \subset W_V$, i.e. une union de classes d'équivalences de $\sim$.

Proposition. *L'élément de $\mathcal{S}$ ou de $\mathcal{S}'$ que détermine toute définition qu'on peut effectuer dans la théorie (X, L, A) où A est un certain ensemble de formules vraies dans tous les M_y, est un invariant de la famille $(\mathbf{M}_y)_{y\in Y}$.*

Preuve: tout $f \in F$ est un isomorphisme entre deux systèmes $\mathbf{M}_i$ et $\mathbf{M}_j$, or la structure T définie suivant une loi de définition dans $\mathbf{M}_i$ satisfait l'axiome introduit par la définition, donc la structure transportée dans $\mathbf{M}_j$ par l'isomorphisme f satisfait aussi cet axiome (puisque rien ne change à travers f), donc est égale à celle définie par la même définition dans $\mathbf{M}_j$. □

Mais la réciproque est fausse. En effet, par exemple il existe des nombres réels impossibles à définir par une formule finie (ils ne peuvent être décrits que par la suite infinie de leurs décimales par exemple), mais tout automorphisme de la théorie des nombres réels les préserve.

Définition. *Pour toute famille finie $(A_i)_{i\in I}$ de formules à variables dans un même ensemble V, on appelle conjonction des A_i, la formule constituée des A_i reliés par des "et", qui dans tout système est* *vraie ssi tous les A_i sont vrais; on appelle disjonction des A_i la formule constituée des A_i reliés par des "ou", qui dans tout système est vraie ssi au moins un des A_i est vraie.*

Théorème. *Pour tout langage L (éventuellement infini) sur un ensemble fini X de sortes, et toute famille finie $(\mathbf{M}_y)_{y\in Y}$ de L-systèmes finis, toute relation invariante est définissable par une formule.*

On se ramène au cas d'un langage relationel en remplaçant chaque symbole algébrique par un symbole relationnel, comme expliqué précédemment.

Pour tout $y \in Y$, tout τ-ensemble fini V, et toute formule A à variables dans V, on définit pour tout $(y, g) \in U_V$ son interprétation (vrai ou faux) $A_y(g)$ dans le système $\mathbf{M}_V$ où les valeurs des variables sont données par g. Ceci définit une partie de U_V qui est invariante, donc image réciproque d'une partie de W_V. Par abus de langage on considérera aussi les formules comme s'appliquant aux éléments de W_V.

On dira alors que A est une formule caractéristique d'un $(y, g) \in U_V$ ssi $\forall (z, h) \in U_V, A_z(h) \Leftrightarrow ((y, g) \sim (z, h))$, i.e. elle équivaut dans W_V à l'égalité avec $\pi_V(y, g)$. Montrons que tout $(y, g) \in U_V$ a une formule caractéristique.

L'ensemble U'_V des $(y, g) \in U_V$ tels que $\operatorname{Im} g = M_y$, est une partie invariante $\pi^*_V(B_V)$, définie par la formule Surj_V qui s'écrit (conjonction sur $c \in X$ des formules faites d'un $\forall x$ de sorte c appliqué à la disjonction des "$x = v$" où v parcourt $V|_c$). La restriction de $\sim$ à U'_V est égale à la relation d'équivalence associée à $(y, g) \mapsto g^*_{L'}(K_y)$ où $L' = L \cup \{\approx\}$ et où K_y est la L'-structure de $\mathbf{M}_y$. Alors pour tous $a, b \in B_V$ tels que $a \neq b$, il existe une formule simple à variables dans V, vraie sur a et fausse sur b. Rappelons que B_V est un ensemble fini, comme quotient d'une partie de l'ensemble fini U_V. Finalement on trouve une formule caractéristique de $(y, g) \in U'_V$ de la forme (Surj_V et la conjonction d'un choix pour tout $b \in B_V, b \neq \pi_V(y, g)$ d'une formule vraie pour (y, g) et fausse pour b).

Cherchons maintenant une formule caractéristique de (y, g) même si g n'est pas surjective. Pour cela, soit $V' = V \sqcup \complement_{M_i} \operatorname{Im} g$, et soit g' prolongeant g à V' par l'identité. Comme g' est surjective, il admet une formule caractéristique A'. Alors la formule A obtenue de A' en liant par $\exists$ toutes les variables hors de V, est une formule caractéristique de g (ça se vérifie facilement).

En conclusion, toute relation invariante, étant une union de classes d'équivalence de $\sim$, se définit par la disjonction d'un choix de formules caractéristiques de chacune de ces classes. $\square$

Prouvons maintenant le théorème de la section précédente. Ajoutons $\mathbf{M}'$ à la famille des $\mathbf{M}_i$, faisant une famille indexée avec un élément de plus, toujours finie. Alors $\mathbf{M}'$ admet une formule caractéristique (où $V = \emptyset$). Comme $\mathbf{M}'$ n'en satisfait pas la négation, il existe un $\mathbf{M}_i$ qui ne la satisfait pas non plus, i.e. qui satisfait la formule caractéristique de $\mathbf{M}'$. Celui-ci est donc isomorphe à $\mathbf{M}'$. $\square$

4.17. Constructions

Présentons enfin les constructions, qui sont le type le plus général de dynamique des théories, ajoutant à la fois une nouvelle sorte, de nouveaux symboles et de nouveaux axiomes. Cette dynamique doit être celle qui explore une certaine réalité que nous n'allons pas ici chercher à définir précisément, d'autant plus qu'on pourrait envisager plusieurs variantes qui ne soient pas rigoureusement équivalentes. En effet, nous avions déjà fait une "approximation" en réduisant la dynamique des constructions de modèles à l'opération de transport de structure, puis de là, la correspondance de Galois sur les structures à celle relative aux isomorphismes. Ceci donne une notion de réalité des structures comme invariance par isomorphisme, que ne peut bien explorer la loi de définition par formules (toujours finies) que dans le cas fini. Etait-ce vraiment la bonne voie, ou pourrait-on en envisager une autre (coïncidant avec celle-ci dans le cas fini mais pouvant en différer dans le cas infini), et laquelle ?

Qu'importe, pour le moment. Dans le même registre d'approximations, exprimons les conditions qu'une loi de construction (X, L, A, X', L', A') doit satisfaire pour être admissible, i.e. considérer qu'elle ne fait que développer une théorie sans la changer.

— Pour tout modèle $\mathbf{M}$ de (X, L, A) il existe une extension en un modèle $\mathbf{M}_1$ de $(X \cup X', L \cup L', A \cup A')$.

— Pour tout isomorphisme f entre deux modèles $\mathbf{M}$ et $\mathbf{M}'$ de (X, L, A), et toutes extensions de $\mathbf{M}$ et $\mathbf{M}'$ respectivement en modèles $\mathbf{M}_1$ et $\mathbf{M}'_1$ de $(X \cup X', L \cup L', A \cup A')$, il existe un unique isomorphisme de $\mathbf{M}_1$ sur $\mathbf{M}'_1$ qui prolonge f.

Comme variante plus stricte de la deuxième condition, sans conséquence pratique en ce qui nous concerne (j'ignore en fait si c'est ou non équivalent), on pourrait exiger que cet unique prolongement soit définissable. Précisément, que lorsqu'une même construction est opérée deux fois, il soit possible de définir une bijection entre les deux nouvelles sortes, et démontrer qu'elle constitue un isomorphisme (de quoi il résulte que tout autre isomorphisme parachuté dessus et laissant fixes les anciennes sortes lui est démontrablement égal).

De cette manière, répéter deux fois une même construction produira deux sortes qui seront la copie l'une de l'autre (voir plus bas la construction de la copie).

Dans toutes les lois de constructions que nous allons ici énoncer, X' sera un singleton $\{c'\}$. Nous indiquerons la règle de simulation pour le cas d'un symbole ou d'un énoncé où c' n'intervient qu'une seule fois (pour une de ses variables ou le résultat). Lorsqu'elle intervient plusieurs fois, il suffit de répéter cette règle de simulation à chaque intervention, puisqu'on peut voir ses différentes interventions comme des interventions de copies de c' différentes, indépendamment produites par une répétition de la même construction.

Loi de sorte de constantes. *$X = \emptyset, L = \emptyset, A = \emptyset$; L' est un ensemble fini de symboles de constantes; A' est l'ensemble des "$s \neq s'$" pour toute paire de symboles distincts s, s' de L', plus la formule en $\forall x$ de sorte c' sur la disjonction des "$x = s$" pour tous $s \in L'$.*

Ces axiomes expriment la bijectivité de l'interprétation de L' sur la partie de sorte c' des modèles.

La simulation de cette construction consiste à remplacer chaque emploi d'une variable de sorte c' par une complication du langage et des énoncés comme suit.

Chaque symbole ayant une variable de sorte c' se remplace par une famille indexée par L' de symboles de même type moins cette variable. Les symboles d'opérations de sorte c', se ramènent au cas précédent en les remplaçant par des symboles de relation (ce qui donne une famille indexée par L' de symboles de relations, munis des axiomes de famille-partition). La simulation des énoncés utilisant la nouvelle sorte, imite la simulation de l'opérateur conditionnel, précédemment évoquée.

Loi de construction de la copie. *$X = \{c\}$, $L = \emptyset$, $A = \emptyset$, L' constitué de deux symboles p et p' d'applications, respectivement de c vers c' et de c' vers c; A' est fait des deux axiomes algébriques exprimant que p et p' sont l'inverse l'un de l'autre: "$\forall_c x, p'(p(x)) = x$" et "$\forall_{c'} x, p(p'(x)) = x$".*

On pourrait aussi bien n'introduire qu'un des deux symboles p ou p', avec les axiomes exprimant sa bijectivité, l'autre symbole pouvant toujours s'obtenir ultérieurement par une définition.

On simule simplement l'emploi de la nouvelle sorte par celle de l'ancienne, un élément de E' étant représenté par celui de E correspondant par cette bijection. Cette construction semble n'avoir aucun intérêt puisque toute théorie comportant une copie se simplifie par cette simulation également appelée *identification* des deux sortes, si ce n'est de remarquer que la construction de la copie survient comme cas particulier de chacune des constructions qui suivent.

Loi de construction d'un produit. *Posons par commodité $X = \{1, \cdots, n\}$. $L = \emptyset$, $A = \emptyset$, L' constitué d'un symbole p_i d'application de c' dans i pour chaque $i \in X$, et d'un symbole d'opération s de sorte c' et d'arité X. Les axiomes sont d'une part $\forall_{c'} x, s(p_1(x), \cdots, p_n(x)) = x$; d'autre part, pour chaque $i \in X$, l'axiome "$\forall x_1 \cdots \forall x_n,\ p_i(s(x_1, \cdots, x_n)) = x_i$".*

On simule une variable de sorte c' par une famille indexée par X de variables.

Si X est vide, le produit est la sorte de constante à un élément.

Un élément de sorte c' dans l'arité d'un symbole, se simule par son remplacement par toute une copie de X, i.e. autant de variables que d'éléments de X; un symbole d'opération de sorte c' se simule par une famille indexée par X de symboles d'opérations de même arité que l'opération initiale. Un quantificateur $\forall_{c'} x$ se simule par $\forall_1 x_1, \cdots, \forall_n x_n$; et de même pour $\exists$.

Dans tous les cas, les simulations s'obtiennent à travers les emplois adéquats des symboles s et p_i.

Loi de construction d'un quotient. *$X = \{c\}$, L fait d'un symbole de relation $\sim$ d'arité une paire (i.e. symbole de relation binaire), $A = \{$"$\forall x, y, x \sim y \Leftrightarrow (\forall z, z \sim x \Leftrightarrow z \sim y)$"$\}$; L' fait d'un symbole p d'application de c vers c'; $A' = \{$"$\forall_c x, y, x \sim y \Leftrightarrow p(x) = p(y)$", "$\forall_{c'} y, \exists_c x\ p(x) = y$"$\}$.*

Pour simuler cette loi, une variable de sorte c' est simulé par une variable de sorte c; le symbole d'égalité sur c' est simulé par le symbole $\sim$; chaque symbole d'opération de sorte c' a simplement son sorte changée en c; chaque élément de sorte c' dans l'arité de tout symbole s d'opération, est simulé par un élément de sorte c, avec l'axiome "$\forall x, \forall x', \forall \bullet, x \sim x' \Rightarrow s(x, \bullet) = s(x', bu)$; et pour tout symbole s de relation, l'axiome $\forall x \forall x' \forall \bullet,\ x \sim x' \Rightarrow (s(x, \bullet) \Leftrightarrow s(x', \bullet))$.

Les constructions suivantes (ensembles de parties et d'applications) ne font que retraduire dans d'autres contextes la construction d'un quotient. Par conséquent, la question de leur mode de simulation sera laissée en exercice, en s'inspirant du mode de simulation du quotient.

Loi de construction d'un ensemble de parties. *$X = \{a, c\}$, L fait d'un symbole R de relation d'arité $\{a, c\}$, $A = \emptyset$; L' fait d'un symbole p d'application de c vers c', et d'un symbole ϵ de relation d'arité $\{a, c'\}$; $A' = \{$"$\forall_a x, \forall_c y, \epsilon(x, p(y)) \Leftrightarrow R(x, y)$", "$\forall_{c'} x, \forall_{c'} y, (\forall_a z, \epsilon(z, x) \Leftrightarrow \epsilon(z, y)) \Rightarrow x = y$", "$\forall_{c'} y, \exists_c x\ p(x) = y$"$\}$.*

Ceci est généralisable à la construction d'un ensemble de relations de n'importe quelle arité fixée, en remplaçant dans la loi ci-dessus la sorte a par un produit de plusieurs sortes (autrement dit, en appliquant d'abord un produit, puis un ensemble de parties où a est envoyé vers le produit).

Loi de construction d'un ensemble d'applications. *$X = \{a, b, c\}$, L fait d'un symbole s d'opération d'arité $\{a, c\}$ et de sorte b, $A = \emptyset$; L' fait d'un symbole p d'application de c vers c', et d'un symbole T d'opération d'arité $\{c', a\}$ et de sorte b; $A' = \{$"$\forall_a x, \forall_c y, T(p(y), y) = s(x, y)$", "$\forall_{c'} x, \forall_{c'} y, (\forall_a z, T(x, z) = T(y, z)) \Rightarrow x = y$", "$\forall_{c'} y, \exists_c x\ p(x) = y$"$\}$.*

Tout comme pour l'ensemble de parties, ceci est généralisable à la construction d'un ensemble d'opérations de n'importe quelle arité fixée.

Loi de construction d'une partie. *$X = \{c\}$, $L = \{P\}$ où P est un symbole de relation unaire, $A = \emptyset$, $L' = \{j\}$ où j est un symbole d'application de c' dans c; $A' = \{$"$\forall_{c'} x, y, j(x) = j(y) \Rightarrow x = y$", "$\forall_c y, (\exists_{c'} x\ j(x) = y) \Leftrightarrow P(y)$"$\}$.*

Dans la simulation, la sorte c' est remplacée par c; chaque variable de sorte c' d'un symbole a simplement son sorte changée en c, sauf dans le cas d'un symbole d'opération s lorsqu'un modèle risque d'avoir sa partie de sorte c' et celle de même sorte que s toutes deux vides (cas nécessitant un traitement séparé). Un symbole d'opération t de sorte c' se simule par un symbole de même arité et de sorte c, avec l'axiome $\forall \bullet, P(t(\bullet))$.

On simule $\exists_{c'} x$ par $(\exists_c x, P(x)$ et $\cdots)$, et $\forall_{c'} x$ par $(\forall_c x, P(x) \Rightarrow \cdots)$.

Loi de construction d'une somme. *X quelconque, $L = \emptyset$, $A = \emptyset$, $L' = \{j_x | x \in X\}$ où j_x est un symbole d'application de x vers c'. Les axiomes expriment que les j_x font de X une partition de c', i.e. tous les j_x sont injectifs, leurs images sont disjointes et d'union toute la sorte c.*

Une autre façon de présenter cela est de commencer par appliquer la loi de sortes de constantes faisant une nouvelle sorte c copie de X, puis d'ajouter au L' de la loi de somme un symbole p d'application de c' dans c. Puis A' exprimera que pour tout x, j_x est injectif et $\forall_{c'} y, p(y) = x \Leftrightarrow \exists_x z, j_x(z) = y$.

Un symbole s ayant une variable de sorte c' se simule par une famille $(s_x)_{x \in X}$ de symboles semblables où dans s_x, la sorte de la variable est changée de c' en x. Pour le reste, c'est plus compliqué: le meilleur moyen est de distinguer le cas où les sortes dans X dans un modèle, sont interprétées par des parties toutes non vides (et traiter à part les autres cas), puis remarquer qu'alors la construction de la somme équivaut à la construction du quotient du produit de c avec tous les $x \in X$, par la relation d'équivalence

$$(x_1, \cdots, x_n, c), (x'_1, \cdots, x'_n, c') \mapsto (c = c' \text{ et } x_c = x'_c)$$

(bien sûr ceci n'est que l'abbréviation d'un énoncé d'autant plus long que le nombre d'éléments de C est grand).

Incrémentation. *$X = \{c\}$, $L = \emptyset$, $A = \emptyset$, $L' = \{j, 0\}$ où j symbole d'application de c vers c', et 0 symbole de constante d'expèce c'; A' est formé de l'axiome d'injectivité de j, et de l'axiome $\forall_{c'} x, x = 0 \not\Leftrightarrow \exists_c y, j(y) = x$.*

Ceci équivaut à faire la somme avec une sorte à une seule constante. Cette notion peut servir par exemple à exprimer la notion d'opération non partout définie (i.e. de domaine une partie du produit), à valeurs dans E: là où l'opération n'est pas définie, elle prend pour valeur le nouvel élément.