Chap 4 :

Ordinaux

1 Définitions

Définition 1 : *Un ensemble x est transitif ssi tout élément de x est un sous-ensemble de x.*
[$Tr(x) \Longleftrightarrow (\forall y(y \in x \Rightarrow y \subset x))$]

Exemple 1 : $\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$

Contre-exemple : $\{\{\emptyset\}\}$

Remarque 1 : *S'il existe, quelque part dans la nature, un ensemble x tel que $x = \{x\}$, alors x est transitif.*
[Cela ne peut pas se produire si on suppose l'axiome de fondation].

Définition 2 : *x est un ordinal ssi x est transitif et bien ordonné par la relation $\in$.*

Remarque 2 : *Cela signifie que la paire ordonnée $\langle x, \in_x \rangle$ est un bon ordre, où $\in_x = \{\langle y, z\rangle \in x \times x : y \in z\}$*

Exemple 2 : $\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$ *etc.*

Contre-exemple : $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\}$ n'est pas un ordinal car $\emptyset \in \{\emptyset\}, \{\emptyset\} \in \{\{\emptyset\}\}$, mais $\emptyset \notin \{\{\emptyset\}\}$
La relation $\in$ n'est pas transitive sur cet ensemble.

Remarque 3 : *Si $x = \{x\}$, alors x n'est pas un ordinal, car on aurait $x \in x$, et donc la relation $\in_x$ ne serait pas irréflexive.*

Notations simplifiées : x ordinal, $y \in x$
On écrira $x \cong \langle A, R\rangle$ au lieu de $\langle x, \in_x\rangle \cong \langle A, R\rangle$, et $pred(x, y)$ au lieu de $pred(x, y, \in_x)$.

Remarque 4 : *Je suis parfaitement conscient du caractère abstrait et peu digeste de cette définition. Il faut toutefois garder présente à l'esprit l'idée que le type qui a inventé tout ça en savait un peu plus en mathématiques que ce que nous sommes censés savoir, nous, au moment où nous écrivons cette définition. En particulier il connaissait l'existence de l'ordinal ω, à savoir $\mathbb{N}$, et de la possibilité de bien ordonner $\mathbb{N}$ de diverses façons. Par exemple, l'ordre usuel sur ω étant $\{0, 1, 2, 3, 4, ...\}$, on peut, si ça nous amuse, écrire ses éléments sous la forme $\{0, 1, 2, 4, 5, 6, ...\} \cup \{3\}$, avec la convention que tout élément du premier ensemble est strictement inférieur à 3. On voit bien que l'ensemble obtenu est en bijection avec $\mathbb{N}$, mais il n'y a pas isomorphisme entre ces 2 ensembles bien ordonnés. Plus précisément, l'ensemble $\{0, 1, 2, 4, 5, 6, ...\}$ est isomorphe à ω, tandis que $\{3\}$ est isomorphe à n'importe quel ensemble à un élément, par exemple $\{\omega\}$. D'où l'idée de poser $\omega + 1 = \omega \cup \{\omega\}$. On constate alors qu'on a les propriétés suivantes :*
(1) $\omega + 1$ est transitif, puisque ses éléments sont soit des entiers (éléments de ω), soit ω lui-même, donc tout élément de $\omega + 1$ est inclus dans $\omega + 1$.
(2) $\omega + 1$ est bien ordonné puisqu'il est égal à $\mathbb{N}$ auquel on aurait rajouté un point à l'infini.
(3) donc $\omega + 1$ est un ordinal, qui est strictement plus gros que ω d'après le lemme de rigidité du bon ordre.

2 Propriétés élémentaires des ordinaux

Théorème 1 : *(1) Si x est un ordinal et si $y \in x$, alors y est un ordinal et $y = pred(x, y)$.*
(2) Si x et y sont des ordinaux et si $x \cong y$, alors $x = y$
(3) Si x et y sont des ordinaux, alors l'une des 3 propositions suivantes (et une seule) est vraie : $x = y, x \in y, y \in x$
(4) Si x, y, z sont des ordinaux et si $x \in y, y \in z$, alors $x \in z$.
(5) Si C est un ensemble non vide d'ordinaux, alors $\exists x \in C, \forall y \in C, (x \in y \vee x = y)$.

Démonstration : (1) Comme x est transitif, on a $y \subset x$, donc y est bien ordonné comme sous-ensemble d'un ensemble bien ordonné.
Par ailleurs, $z \in y \iff z < y \iff z \in pred(x, y)$, donc $y = pred(x, y)$.
Enfin, y est transitif car, si $z \in y$, la propriété précédente montre que $z = pred(y, z)$, donc $z \subset y$.

Moralité : Tout ordinal est égal à l'ensemble des ordinaux qui le précèdent.

Exemple 3 : *On verra un peu plus tard que* $27 = \{0, 1, 2, ..., 25, 26\}$

(2) évident car alors $\in_x = \in_y = \in$
(3) C'est une conséquence directe du théorème fondamental vu à la fin du Chap 3.
(4) évident.
(5) Soit $x \in C$
$\rightarrow$ Si $x \cap C = \emptyset$, alors x convient :
en effet, soit $y \in C$, on a $x \in y$ ou $y \in x$ ou $x = y$
mais $y \in x$ exclu car alors $x \cap C \neq \emptyset$
$\rightarrow$ Si $x \cap C \neq \emptyset$:
$x \cap C$ étant bien ordonné par $\in$, il admet un plus petit élément x', et $x' \cap C = \emptyset$
[Si $y \in x' \cap C$, alors $y \in x \cap C$, et donc x' ne serait plus le plus petit élément de $x \cap C$].
...et donc x' convient.

Théorème 2 : $\neg \exists z \forall x$*(x est un ordinal $\Rightarrow x \in z$)*
[Il n'existe pas d'ensemble de tous les ordinaux].

Démonstration : S'il existait un tel ensemble, d'après le schéma de compréhension il existerait un ensemble
$ON = \{x : x$ est un ordinal$\}$
$\forall x \in ON$, x est égal à l'ensemble des ordinaux qui le précèdent, donc $x \subset ON$
$\Rightarrow ON$ est transitif.
par ailleurs, (3) (4) (5) du théorème 1 $\Rightarrow ON$ est bien ordonné par $\in$, donc ON est un ordinal.
donc $ON \in ON$, absurde car alors $\in$ ne serait plus un ordre total strict.

Remarque 5 : *Par contre, toute section commençante du «non-existant» ON est un ordinal.*

Lemme 1 : *Si A est un ensemble d'ordinaux et si $\forall x \in A, \forall y \in x, y \in A$,*
alors A est un ordinal.

Démonstration : en exercice.
[Indication : il suffit d'écrire].

Théorème 3 ***fondamental :*** *Si $\langle A, R\rangle$ est un ensemble bien ordonné, alors il existe un unique ordinal C tel que $\langle A, R\rangle \cong C$*

Démonstration : Soit $B = \{a \in A : \exists x, (x \text{ est un ordinal } \wedge \langle pred(A, a, R), R\rangle \cong x)\}$

Soit f la fonction de domaine B définie par

$\forall a \in B, f(a) =$ l'unique ordinal x tel que $\langle pred(A, a, R), R\rangle \cong x$, et soit $C = \operatorname{Im} f$.

Si $y \in C$, alors $y = f(t)$

Si $w \in y$, alors $w = f(u)$, où $u \in t$, donc $w \in C$.

D'après le lemme, C est un ordinal,

et f est donc un isomorphisme de $\langle B, R\rangle$ sur C.

→ Si $B = A$, terminé.

→ Sinon, $B = pred(A, b, R)$ pour un certain $b \in A$, mais $pred(A, b, R)$ est isomorphe à un ordinal, donc $b \in B$, ce qui est absurde car $B = pred(A, b, R)$.

donc $B = A$, ce qui démontre l'existence de l'ordinal C.

L'unicité découle trivialement de l'assertion n°2 du théorème 1.

Le théorème fondamental justifie la définition suivante :

Définition 3 *: Si $\langle A, R\rangle$ est bien ordonné, le type d'ordre de $\langle A, R\rangle$, noté Type$\langle A, R\rangle$, est l'unique ordinal C tel que $\langle A, R\rangle \cong C$.*

La notion de type d'ordre joue un rôle fondamental en analyse, nous aurons l'occasion d'en voir quelques exemples et applications dans la suite de ce «travail».

Nous y aurons également besoin des notations et définitions ci-dessous.

Nouvelles notations :

→ Les lettres grecques désignent des ordinaux.

$\forall\alpha$ remplace «$\forall x(x$ est un ordinal)» etc.

→ $\alpha < \beta$ remplace $\alpha \in \beta$

→ $\alpha \leq \beta$ (ou $\beta \geq \alpha$) signifie $\alpha \in \beta$ ou $\alpha = \beta$.

Définition 4 *: Si X est un ensemble d'ordinaux,* $\sup(X) = \bigcup X$

Si de plus $X \neq \emptyset, \min(X) = \bigcap X$

Lemme 2 *: (1) $\forall\alpha, \beta\ (\alpha \leq \beta \iff \alpha \subset \beta)$*

(2) Si X est un ensemble d'ordinaux, $\sup(X)$ est le plus petit ordinal $\geq$ à tous les éléments de X.

(3) Si de plus $X \neq \emptyset$, $\min(X)$ est le plus petit élément de X.

Démonstration : en exercice.

Nous allons maintenant utiliser de façon cruciale la notion d'ordinal pour construire $\mathbb{N}$, puis $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$.