Chap 3 :

Relations, fonctions, bons ordres

Définition 1 *: Une relation est un ensemble R dont tous les éléments sont des paires ordonnées.*
R étant une relation, on définit
$dom(R) = \{x : \exists y \ \ (\langle x, y\rangle \in R)\}$
$\mathrm{Im}(R) = \{y : \exists x \ \ (\langle x, y\rangle \in R)\}$

Remarque 1 *: On a clairement $R \subset dom(R) \times \mathrm{Im}(R)$*
et on peut définir
$R^{-1} = \{\langle x, y\rangle : \langle y, x\rangle \in R\}$

Définition 2 *: f est une fonction ssi f est une relation et*
$\forall x \in dom(f), \exists! y \in \mathrm{Im}(f), (\langle x, y\rangle \in f)$

Notations :
$\rightarrow f : A \rightarrow B$ signifie :
(1) f est une fonction
(2) $dom(f) = A$
(3) $\mathrm{Im}(f) \subset B$
$\rightarrow$ Si $f : A \rightarrow B$ et $x \in A$, on note $f(x)$ l'unique $y \in B$ tel que $\langle x, y\rangle \in f$.
$\rightarrow$ Si $C \subset A, f \upharpoonright C = f \cap (C \times B)$ est la restriction de f à C.
$\rightarrow f(C) = \mathrm{Im}(f \upharpoonright C) = \{f(x) : x \in C\}$

Définition 3 *: f est une injection ssi f^{-1} est une fonction.*
f est une surjection ssi $\mathrm{Im}(f) = B$
f est une bijection ssi f est à la fois une injection et une surjection.

Dans toute la suite, xRy est l'abréviation pour $\langle x, y\rangle \in R$.

Définition 4 *: Un «ordre total strict» est une paire ordonnée $\langle A, R\rangle$, où A est un ensemble et R une relation,vérifiant les propriétés suivantes :*
(1) : R est transitive sur A :
$\forall x, y, z \in A, (xRy \wedge yRz) \Rightarrow xRz$
(2) On a la trichotomie suivante :
$\forall x, y \in A, (x = y \vee xRy \vee yRx)$
(3) R est irréflexive :
$\forall x \in A, \neg(xRx)$

Remarque 2 *: L'irréflexivité prouve que, dans la propriété (2), le ou est exclusif.*

Remarque 3 *: Soit $\leq$ une relation d'ordre total sur A, au sens habituel du terme, c'est-à-dire au sens défini dans le Chap 0.*
Alors, la relation R définie sur A par xRy ssi $x \leq y$ et $x \neq y$ est un ordre total strict.
Réciproquement, si $\langle A, R\rangle$ est un ordre total strict, alors la relation $\leq$ définie sur A par $x \leq y$ ssi xRy ou $x = y$ est une relation d'ordre total.

Définition 5 : *Soient A et B 2 ensembles, R et S 2 relations.*
On dit que $\langle A, R\rangle \cong \langle B, S\rangle$ *ssi il existe une bijection* $f : A \to B$ *telle que*
$\forall x, y \in A, (xRy \iff f(x)Sf(y))$
f *est appelé un isomorphisme de* $\langle A, R\rangle$ *sur* $\langle B, S\rangle$.

Définition 6 : *R est un bon ordre (wellordering) sur A, ou* $\langle A, R\rangle$ *est bien ordonné, ssi* $\langle A, R\rangle$ *est un ordre total strict et toute partie non vide de A possède un élément R–minimal.*

[$\forall B, B \subset A \wedge B \neq \emptyset \Rightarrow \exists x, x \in B \wedge \forall y \in B, xRy \vee x = y$]

Notation : $\langle A, R\rangle$ bien ordonné, soit $x \in A$.
$pred(A, x, R) = \{y \in A : yRx\}$
C'est la «section commençante ouverte» délimitée supérieurement par x.

Lemme 1 ***de rigidité du bon ordre :*** *Si* $\langle A, R\rangle$ *est bien ordonné, alors* $\forall x \in A$, $\langle A, R\rangle \ncong \langle pred(A, x, R), R\rangle$
[Un ensemble bien ordonné n'est pas isomorphe à l'une de ses sections commençantes propres].

Démonstration : Raisonnons par l'absurde.
Soit $f : A \to pred(A, x, R)$ un isomorphisme, et soit $B = \{y \in A : f(y) \neq y\}$
On a $x \notin pred(A, x, R)$, donc nécessairement $f(x) \neq x$
i.e. $x \in B$, donc $B \neq \emptyset$
donc B a un plus petit élément, soit y.
On a donc $f(y) \neq y$ et $\forall z \in A, zRy \Rightarrow f(z) = z$
Mais $x \in B$ et y est le plus petit élément de B, donc yRx ou $y = x$.

$\to$ Si $y = x$, on a $f(x)Rx$ [car $f(x) \in pred(A, x, R)$]
donc $f(x) \notin B$
donc $f(f(x)) = f(x)$
avec $f(x) \neq x$
ce qui contredit l'injectivité de f.

$\to$ Si yRx, comme f est une bijection :
$\exists! t \in A, f(t) = y$
On a $t \neq y$ [sinon $f(y) = y$], donc tRy ou yRt.

Remarque 4 : *On ne peut pas avoir* $f(t) = t$
car alors on aurait $f(f(t)) = f(t)$
$f(y) = y$ *exclu*
donc $f(t) \neq t$,*i.e.* $t \in B$.

mézalor forcément yRt
donc $f(y)Rf(t)$ [car f isomorphisme]
i.e. $f(y)Ry$
donc $f(y) \notin B$
i.e. $f(f(y)) = f(y)$, avec $f(y) \neq y$, ce qui contredit l'injectivité de f.

Commentaires : Ce lemme de rigidité du bon ordre prouve la «richesse» de la structure d'ensemble bien ordonné.

En effet, si on pose $A \simeq B$ ssi il existe une bijection de A sur B, alors $\mathbb{N} \simeq \mathbb{Z}, \mathbb{Z} \simeq \mathbb{Q}, \mathbb{Q} \simeq \overline{\mathbb{Q}}$ ensemble des nombres complexes algébriques sur $\mathbb{Q}$ etc.

Bref, il existe beaucoup d'ensembles qui sont «équipotents» à d'autres ensembles beaucoup plus petits.

Ce genre de «désagréments» ne peut plus se produire dès l'instant qu'on impose aux ensembles en question d'être couplés avec une structure de bon ordre.

Lemme 2 *: Si $\langle A, R\rangle$ et $\langle B, S\rangle$ sont 2 ensembles bien ordonnés isomorphes, alors l'isomorphisme entre eux est unique.*

Démonstration : Soient f et g 2 isomorphismes différents

Soit $C = \{y \in A \,|\, f(y) \neq g(y)\}$

$C \neq \emptyset$ car $f \neq g$

Soit y le plus petit élément de C

On a donc $f(y) \neq g(y)$ et $\forall z \in A, zRy \Rightarrow f(z) = g(z)$

mais $f(y) \in B$ et g bij., donc $f(y) = g(y')$

$y \neq y'$, car sinon $f(y) = g(y)$

donc, soit yRy',soit $y'Ry$

$\rightarrow$ Si $y'Ry$, alors $y' \notin C$

donc $f(y') = g(y')$

i.e. $f(y') = f(y)$,avec $y' \neq y$, ce qui contredit l'injectivité de f.

$\rightarrow$ donc $yRy' \Rightarrow g(y)Sg(y') \Rightarrow g(y)Sf(y)$

$\rightarrow$ En intervertissant les rôles de f et g, on démontre de même que $f(y)Sg(y)$, ce qui est absurde car S est un ordre total strict.

Nous allons voir maintenant que 2 ensembles bien ordonnés sont forcément comparables.

Théorème 1 ***fondamental :*** *Soient $\langle A, R\rangle$ et $\langle B, S\rangle$ 2 ensembles bien ordonnés.*

Alors, l'un, et un seul, de ces 3 phénomènes a lieu :

(a) $\langle A, R\rangle \cong \langle B, S\rangle$

(b) $\exists y \in B \;\; (\langle A, R\rangle \cong \langle pred(B, y, S), S\rangle)$

(c) $\exists x \in A \;\; (\langle pred(A, x, R), R\rangle \cong \langle B, S\rangle)$

[2 ensembles bien ordonnés non isomorphes sont tels que l'un est isomorphe à une section commençante de l'autre]

Démonstration : Soit $f = \{\langle v, w\rangle : v \in A \wedge w \in B \wedge \langle pred(A, v, R), R\rangle \cong \langle pred(B, w, S), S\rangle\}$.

Si $v \in dom(f)$, alors $\forall v' \in A, v'Rv \Rightarrow v' \in dom(f)$

en effet, $\langle pred(A, v, R), R\rangle \cong \langle pred(B, w, S), S\rangle$,

donc en particulier $\langle pred(A, v', R), R\rangle \cong \langle pred(B, f(v'), S), S\rangle$.

Cela prouve que $dom(f)$ est une section commençante de A.

De même, $\mathrm{Im}(f)$ est une section commençante de B.

et donc $f = S_x \times S_y$

Si $S_x \neq A$ et $S_y \neq B$

Soit x' le plus petit élément de $A \setminus S_x$

Soit y' le plus petit élément de $B \setminus S_y$

Il est clair que $S_x \cup \{x'\} \cong S_y \cup \{y'\}$

donc $\langle x', y'\rangle \in f$,contradiction.

Remarque 5 *: Il est clair que la relation $\cong$ entre ensembles bien ordonnés est réflexive, symétrique et transitive.*

Par ailleurs, le fait que 2 ensembles bien ordonnés soient toujours comparables nous donne envie de «hiérarchiser» les classes d'équivalence de bons ordres, en posant $Cl(\langle A, R\rangle) \leq Cl(\langle B, S\rangle)$ ssi $\langle A, R\rangle$ est isomorphe à une section commençante de $\langle B, S\rangle$. La classe d'équivalence mesurerait en quelque sorte la «longueur» de l'ensemble bien ordonné, et le lemme de rigidité du bon ordre prouverait que 2 ensembles bien ordonnés ayant la même «longueur» sont isomorphes.

Malheureusement, la «classe» ou la «famille» de tous les ensembles bien ordonnés qui sont isomorphes à $\langle A, R\rangle$ ne constitue pas un ensemble, on ne peut donc pas parler de «Classe d'équivalence de bons ordres».

D'où la nécessité, parmi tous les ensembles bien ordonnés isomorphes entre eux, d'en sélectionner un qui possède des propriétés bien particulières. C'est ainsi que nous allons être amenés à définir la notion d'ordinal.