

Annexe II :

L'Hotel de Hilbert

« Si vous mettez le couvert et que chaque couvert comporte une fourchette et un couteau, vous savez qu'il vous faudra le même nombre de fourchettes que de couteaux : qu'il s'agisse d'un dîner intime pour deux ou d'un banquet géant pour 2000 personnes, pas besoin de connaître le nombre de convives pour être sûr que les 2 nombres sont égaux. Cette observation est la clef du concept de nombre. On dit que 2 ensembles d'objets sont en correspondance biunivoque si, à tout objet du premier ensemble, correspond un objet unique du second et réciproquement. Deux ensembles entre lesquels existe ce type de correspondance contiennent le même nombre d'objets.

Lorsque les ensembles sont infinis, les paradoxes apparaissent. A titre d'exemple, Hilbert a décrit un hôtel imaginaire qui contient une infinité de chambres. Un soir, l'hôtel étant complet, un voyageur solitaire se présente. Ingénieusement le gérant demande à chaque client de bien vouloir se déplacer dans la chambre voisine : celui de la chambre 1 prend possession de la chambre 2, celui de la chambre 2 va occuper la chambre 3 et ainsi de suite. Tous les clients ont une chambre et la première est mise à la disposition du nouvel arrivant ! Le lendemain se présente un car de l'agence « Voyages Illimités », lequel contient une infinité de touristes. Cette fois le gérant déplace l'occupant de la chambre 1 dans la chambre 2, celui de la chambre 2 dans la chambre 4, celui de la chambre 3 dans la chambre 6, ... et celui de la chambre n dans la chambre $2n$. Ce transfert libère donc tous les numéros impairs, de sorte que le premier passager du car peut bénéficier de la chambre 1, le deuxième de la chambre 3, le troisième de la chambre 5 et plus généralement le $n^{\text{ième}}$ de la chambre $2n - 1$. On pourrait même loger ainsi tous les touristes d'une caravane ayant une infinité de tels cars. »

Attention toutefois : A la lecture du texte on comprend tout de suite que Hilbert suppose implicitement que tous les infinis qui interviennent dans cette histoire sont dénombrables. En effet, notre brave géant serait fort marri si le surlendemain se pointait un car contenant une collection de touristes indexés par l'ensemble des nombres réels.

C'est en quelque sorte ce qu'on pourrait appeler la variante infinie « avancée » du célèbre principe des tiroirs et des chemises, mais on aura l'occasion d'y revenir. En ce qui concerne ces mouvements bizarres de pensionnaires à l'intérieur de l'hôtel, on y verra plus clair quand on aura examiné quelques exemples de bons ordres sur ω .